

CONTRIBUTION À L'IDENTIFICATION ET AU RÉGLAGE ROBUSTES

THÈSE N° 1354 (1995)

PRÉSENTÉE AU DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

OLIVIER CAMILLE RAMAMBASON

Ingénieur mécanicien diplômé de l'Ecole Supérieure Polytechnique de Madagascar
de nationalité malgache

acceptée sur proposition du jury:

Prof. D. Bonvin, rapporteur
Prof. L. Guzzella, corapporteur
Prof. M. Jufer, corapporteur
Dr M. M'Saad, corapporteur

Lausanne, EPFL
1995

AVANT-PROPOS

J'ai vécu une décennie et demie comme spectateur engagé de l'évolution de l'Automatique. A l'origine, les mécaniciens avaient besoin de la théorie des servomécanismes pour que les barrages hydroélectriques assurent les 50 [Hz] de nos prises électriques murales. Les électriciens, dopés par la théorie des circuits se sont ensuite emparés de l'automatique au point de l'amener à former une nouvelle branche scientifique quasi autonome. Actuellement, les chimistes ont tendance à supplanter ces derniers.

Mes passages successifs à l'Institut d'Automatique de l'EPFL m'ont permis d'être en contact avec des personnes, non seulement d'un niveau scientifique exceptionnel, mais également d'une grandeur d'âme ineffable. Dont mes supérieurs successifs : le prof. Alfred Roch, le prof. Roland Longchamp, le prof. Dominique Bonvin et madame Marie-Claire Corminboeuf qui aurait dû être citée en premier ...

Ma carrière d'ingénieur aurait été bien remplie à l'heure actuelle si mon oncle Théos (nom de Dieu) ne m'avait pas aiguillonné une année durant pour que je troque mon salaire confortable de chef de production en entreprise à l'époque, contre une hypothétique toge universitaire assortie d'innombrables incertitudes qui perdurent à l'heure actuelle.

Je dédie ce travail à Françoise et Mélanie : mon quotidien au féminin, mon quotidien tout court.

RESUME

L'incertitude paramétrique est représentée par l'écart entre le modèle mathématique complet d'un processus dynamique et le modèle nominal simplifié dont on se sert pour l'étudier. La différence entre ces deux modèles induit une sensibilité au système nominal réglé, tant au niveau de sa stabilité que de sa performance. On définit le réglage robuste comme l'incorporation des incertitudes dans l'analyse (détermination de la stabilité du système bouclé) et la synthèse (calcul d'un régulateur satisfaisant à des marges prédéfinies de stabilité et de performances) d'un système bouclé.

Pour étudier le réglage robuste de procédés à variations paramétriques considérées comme faibles, nous nous servons, dans ce travail, des fonctions de sensibilités différentielles. Nous utilisons un schéma fonctionnel combiné pour générer les fonctions de sensibilités relatives. Ces fonctions peuvent servir à affiner les paramètres d'un régulateur existant. Nous présentons également plusieurs structures de régulateurs qui permettent de construire des systèmes réglés intrinsèquement insensibles aux variations paramétriques. Nous arrivons à la conclusion que toutes les configurations de réglage insensible sont équivalentes à un régulateur à gain élevé.

Pour les procédés dont les paramètres sont sujets à de grandes variations, nous avons choisi le régulateur polynomial à deux degrés de liberté RST comme cadre d'étude. D'abord, nous avons établi un critère de robustesse à partir de l'incertitude paramétrique. Ensuite, deux procédures complémentaires de robustification du régulateur RST calculé par placement de pôles sont proposées. La première démarche consiste à augmenter l'ordre du polynôme caractéristique servant à placer les pôles du système bouclé. La deuxième méthode revient à compenser le signal supplémentaire dû aux incertitudes paramétriques. Ce signal est à l'origine du dysfonctionnement du système réglé qui a été synthétisé sur la base des paramètres nominaux. Nous proposons différentes configurations de schémas fonctionnels qui permettent d'émuler ce signal de perturbation.

Le premier volet de notre identification robuste est constitué par le renforcement de l'algorithme des moindres carrés récurrents (RLS) pour le rendre capable d'identifier des paramètres variables. Normalement, la matrice de gain d'adaptation du RLS doit être réajustée quand on détecte une variation paramétrique. Pour réaliser ce renforcement, nous proposons une nouvelle méthode d'estimation, basée sur l'erreur de prédiction, de la matrice de covariance des paramètres identifiés que l'on additionne à la matrice de gain. Nous calculons ensuite l'incertitude paramétrique à l'aide des éléments diagonaux de cette matrice de covariance.

ABSTRACT

The parametric uncertainty is defined as the gap between the complete model of a dynamical process and its simplified nominal one which is normally used to investigate the properties of the system. It is because of this model mismatch that the role of sensitivity in designing control systems becomes very important. In robust control, the parametric uncertainty is taken into account in both the analysis and the synthesis phases of the closed-loop system.

In this thesis, first, robustness to small parameter variation is studied using differential sensitivity functions. A combined diagram is used to generate relative sensitivity functions which can be used for improving existing controllers. Several control structures which are suitable for the design of zero-sensitivity control systems are presented.

Then, as a framework for studying large parameter uncertainty, the RST controller has been chosen. Robustness criteria, based on parameter uncertainty, have been established. Two complementary ways to robustify a nominal RST controller are presented. First, the pole placement characteristic polynomial is augmented. In the second approach, we try to compensate the supplementary signal due to the parametric uncertainty. This signal causes the nominal system malfunction. Instead of estimating this generalized perturbation, various block-diagrams are used to emulate it.

As far as identification is concerned, a new method of robust identification which reinforces the tracking capability of RLS algorithm for a nonstationary system is presented. Normally, the gain matrix of RLS has to be adjusted when parameter variations are detected. In this work, an on-line estimation of the parameter covariance as an additional gain matrix is proposed for this adjustment on the basis of the prediction error. Then, the diagonal elements of this computed covariance matrix are used to calculate an on-line estimation of the parameter uncertainty.

NOTATIONS ET SYMBOLES

CONVENTIONS DE NOTATION

Noms de variables

γ	coefficients (lettre grecque)
x	variable scalaire (lettre minuscule)
\mathbf{x}	vecteur (lettre minuscule en gras)
X	polynôme ou fonction (lettre majuscule)
\mathbf{X}	matrice (lettre majuscule en gras)
\mathcal{P}	espace
\mathbf{R}	ensemble

Eléments

- Définition 3.1
- Lemme 3.1
- Théorème 3.1
- Corollaire 3.1
- Remarque 3.1
- Figure 3.1
- Tableau 3.1
- et les formules mathématiques

sont numérotés par chapitre et suivant l'ordre de leur apparition.

Formules

Le premier chiffre de la numérotation des formules, des figures ou des tableaux se réfère au numéro du chapitre dans lequel ils se trouvent.

Bibliographie

Les références sont groupées à la fin de chaque chapitre et sont indiquées par le nom de l'auteur suivi par l'année d'édition du document consulté entre parenthèses ().

SYMBOLES ET VARIABLES MATHÉMATIQUES

Terminologie

Les symboles et les noms de variables usuels de la littérature « robuste » sont utilisés dans ce mémoire. Ils sont définis la première fois qu'ils apparaissent dans le texte.

TABLE DES MATIERES

Avant-propos	page
Résumé	iii
Notations et symboles	v
	vii
 Chapitre 1	 INTRODUCTION
 1.1	 REGLAGE PERFORMANT
	1
 1.2	 NOTION DE REGLAGE ROBUSTE
	2
1.2.1	Démarche de synthèse robuste
1.2.2	Formulation de la robustesse dans le domaine fréquentiel
1.2.3	Sur l'identification des processus à paramètres variables
	3
	4
 1.3	 MOTIVATIONS ET OBJECTIFS DU TRAVAIL
	5
 1.4	 PLAN DE LA THESE
	6
	<i>REFERENCES</i>
	8
 Chapitre 2	 REGLAGE INSENSIBLE
 <i>INTRODUCTION</i>	 9
 2.1	 FORMES DE SENSIBILITES
	10
2.1.1	Sensibilités différentielles
2.1.2	Sensibilité structurelle
	15
 2.2	 STRUCTURES DE REGLAGE INSENSIBLE
	18
2.2.1	Sensibilité et performance
2.2.2	Construction de régulateurs intrinsèquement insensibles
	19
 2.3	 ETUDE DU GPC
	23
2.3.1	Réalisation du GPC
2.3.2	Etude des paramètres de synthèse du GPC
2.3.3	Exemple pratique de synthèse d'un GPC
	26
	31
 2.4	 ANALYSE DE SENSIBILITE D'UN REGULATEUR A GAIN ELEVE
	35
2.4.1	Modélisation d'un système non stationnaire
2.4.2	Modélisation d'un régulateur à gain élevé
2.4.3	Analyse du régulateur à gain élevé
2.4.4	Illustration pratique du compensateur relais-PID
	36
	38
	43
	<i>REFERENCES</i>
	47

Chapitre 3 **ROBUSTIFICATION DU REGULATEUR RST**

INTRODUCTION	49
3.1 CARACTERISTIQUES DE ROBUSTESSE	50
3.1.1 Critères de robustesse	51
3.1.2 Marges de robustesse	53
3.2 ROBUSTIFICATION BASEE SUR L'INCERTITUDE PARAMETRIQUE	57
3.2.1 Synthèse RST standard	
3.2.2 Bornes de robustesse	58
3.2.3 Régulateur RST robustifié par le choix de A_{obs}	60
3.3 ROBUSTIFICATION BASEE SUR LA PERTURBATION EMULEE	63
3.3.1 Modèle du procédé	
3.3.2 Modèle du régulateur	65
3.3.3 Régulateur Q-RST	68
3.3.4 Comparaison de Q-RST, IMC, RST-Landau	70
3.3.5 Autre stratégie de synthèse d'un régulateur Q-RST	72
3.4 EXEMPLE D'APPLICATION	75
3.5 CONCLUSION	79
REFERENCES	80

Chapitre 4 **IDENTIFICATION ROBUSTE**

INTRODUCTION	81
4.1 APPROXIMATION STOCHASTIQUE	82
4.1.1 Gradient stochastique	83
4.1.2 NLMS améliorés	86
4.1.3 Newton stochastique et RLS	87
4.1.4 Illustrations du gradient stochastique	90
4.2 IDENTIFICATION DE PARAMETRES VARIABLES	95
4.2.1 Schéma cadre : BLUE	
4.2.2 Moindres carrés revisités	96
4.2.3 Estimation en ligne de la covariance	98
4.2.4 Algorithme à modification explicite de covariance	100
4.3 INCERTITUDES $\Delta\theta$ ESTIMEES EN LIGNE	102
4.3.1 Nouvelle méthode d'estimation de l'incertitude paramétrique	
4.3.2 Méthode de Hjalmarsson - Ljung	103

4.4	ILLUSTRATION PRATIQUE	105
4.5	CONCLUSION	108
	<i>REFERENCES</i>	109
Chapitre 5	CONCLUSION	111
	LISTE DES SYMBOLES	113

INTRODUCTION

1.1 REGLAGE PERFORMANT

La stabilité et la précision sont les premières qualités recherchées en automatique qui, rappelons-le, est la discipline ayant pour objet principal l'amélioration par contre-réaction de la dynamique des systèmes. Au prime abord, les concepteurs de systèmes asservis recherchent la concordance des signaux de sortie avec les signaux de consigne. Mais cette démarche s'avère insatisfaisante tant qu'on n'incorpore pas dans l'étude une connaissance de la fonction de transfert du processus à régler. Par la suite, ce dernier sera toujours appelé *procédé*. De plus en plus, l'analyse et la synthèse des systèmes asservis reposent sur un modèle explicite du procédé à commander. Tant que les mises en équations sont possibles, les modèles obtenus permettent de concevoir des régulateurs fiables. Mais à partir du moment où, faute de mieux, on doit se contenter d'un artefact qui ne traduit que partiellement le vrai comportement dynamique, stabilité et précision peuvent se dégrader au point d'aboutir à un système réglé inutilisable.

Une démarche sérieuse de conception d'un régulateur commence par l'obtention d'un modèle fiable du procédé. La démarche s'appelle *modélisation* si on effectue une mise en équations sur la base des lois physiques. On peut également tenter d'*identifier* un modèle du procédé à partir de ses signaux d'entrée - sortie. Pour maîtriser les procédés à paramètres évolutifs, on peut utiliser un algorithme d'identification en ligne. Ainsi, les paramètres du régulateurs sont ajustés à l'aide des coefficients identifiés en temps-réel. Le schéma de réglage adaptatif s'est avéré inopérant (Rohrs *et al.*, 1985) en cas de sous-modélisation du procédé. Les modes rapides, presque toujours négligés, introduisent des auto-oscillations inattendues, voire un comportement instable, dans le fonctionnement du système (Cobb, 1988).

Cette nouvelle problématique nous amène à nous intéresser au modèle complémentaire, appelé modèle d' *incertitude paramétrique*.

1.2 NOTION DE REGLAGE ROBUSTE

Il est donc utile d'incorporer les *incertitudes de modélisation* dans l'étude des systèmes réglés. L'ajout de cette démarche à celle de l'automatique classique constitue le *réglage robuste*. Il existe différentes manières de formuler un problème de réglage robuste. Si toute la dynamique du procédé se prête à une mise en équations, on la modélise en une *partie nominale* $P_0(s)$ et une *partie incertaine* $\Delta P(s)$. S'il n'est pas possible d'obtenir une représentation de l'incertitude, on peut définir un *multi-modèle* $\{P_1(s), \dots, P_m(s)\}$ i.e. plusieurs modèles nominaux candidats qui décrivent au mieux la nature incertaine d'un seul et même procédé (Ackermann, 1980).

Signalons que, dans ce travail, la plupart des développements théoriques se font en analogique. Ils restent valables en numérique en prenant garde de normaliser la pulsation par la période d'échantillonnage T_e (ou la fréquence f_e) $\omega := \omega T_e = 2\pi f/f_e$. Pour les réponses fréquentielles, le domaine de variation pour la pulsation normalisée est compris entre 0 et π (correspondant à $0 + 0.5f_e$).

1.2.1 Démarche de synthèse robuste

La synthèse est appelée robuste car elle vise la stabilité en boucle fermée en tenant compte explicitement des incertitudes d'un modèle du procédé. Remarquons que l'on ne traite pas explicitement la robustesse de la performance. On peut relever les *quatre étapes d'une synthèse robuste* :

a) La modélisation : Comme complément à l'approche classique, il faut fournir un modèle de perturbation en sus du modèle nominal habituellement utilisé.

b) La synthèse du régulateur nominal : Une synthèse, de préférence paramétrique, doit être menée au préalable en utilisant le modèle nominal du procédé. Le régulateur calculé doit satisfaire à deux qualités antagonistes : d'une part, une réponse rapide qui équivaut à une bonne précision dynamique et, d'autre part, la préservation de la stabilité, voire d'un bon amortissement de cette réponse. C'est le dilemme habituel de stabilité-précision auquel le concepteur d'un régulateur est toujours confronté.

c) L'émulation de la perturbation étendue : Il n'est pas toujours nécessaire d'implanter un algorithme spécifique d'estimation de perturbation. L'astuce pour contourner ce problème consiste à tirer partie d'une configuration comportant un modèle parallèle ou série-parallèle utilisé conjointement avec le procédé réel. Le signal ainsi obtenu permettra d'apporter une

correction, bénéfique à la robustesse, *via* une pondération appropriée. On introduit de la sorte un degré de liberté supplémentaire pour la résolution du problème de robustesse.

d) La "robustification" : Cette dernière étape n'est, en général, qu'un passage de vérification si les spécifications de robustesse sont respectées. Si elles ne le sont pas, on doit reprendre la synthèse au point b) en choisissant des nouvelles valeurs au niveau du degré de liberté supplémentaire introduit en c).

1.2.2 Formulation de la robustesse dans le domaine fréquentiel

A l'origine, la problématique du réglage robuste a été formulée dans le domaine fréquentiel (Zames, 1981). On peut dissocier le cas d'une perturbation infinitésimale de celui d'une grande perturbation. Le critère de stabilité de Nyquist est utilisé comme cadre de raisonnement. La figure 1.1-A illustre un **problème de sensibilité**. La variation paramétrique infinitésimale est traduite par un ensemble de lieux de Nyquist qui forment une bande de largeur $\delta L(j\omega)$ autour du lieu de Nyquist nominal $L_0(j\omega)$. Tant que la bande ne recouvre pas le point -1 , le système réglé reste stable. On peut associer au système stable une bille qui roule sur un plan horizontal (fig. 1.1-B); la stabilité est perdue quand la bille se trouve sur un plan incliné, à gauche du point limite (-1) . Insensibiliser le réglage équivaut à forcer la caractéristique réelle à demeurer au voisinage de la caractéristique nominale.

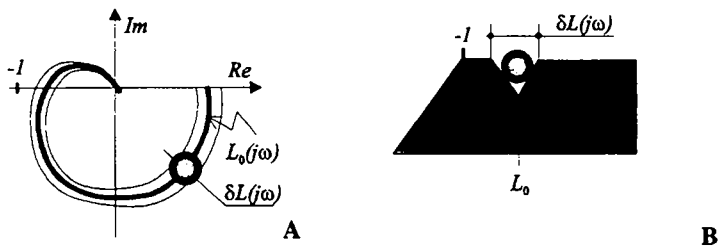


Fig. 1.1 : Représentation fréquentielle d'un réglage insensible

La figure 1.2-A décrit un **problème de robustesse** si les variations $\Delta L(j\omega)$ du lieu de Nyquist sont grandes. Le risque d'instabilité est maximal à la pulsation dénotée ω^* . Le système est robuste si la pire des variations paramétriques ne déstabilise pas le système réglé *i.e.* $|L(j\omega^*) - L_0(j\omega^*)| < |1 + L_0(j\omega^*)|$. Schématiquement (fig. 1.2B), robustifier un régulateur consiste à maintenir la bille suffisamment éloignée du point critique de manière à ce qu'elle ne puisse pas se retrouver sur le plan incliné à gauche du point -1 .

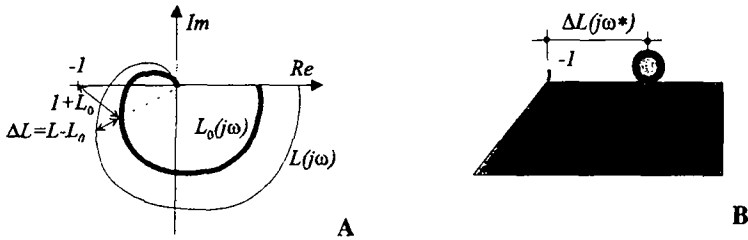


Fig. 1.2 : Représentation fréquentielle d'un réglage robuste

1.2.3 Sur l'identification des processus à paramètres variables

L'identification d'un procédé consiste à lui donner une représentation mathématique construite à partir des séquences de mesure d'entrée/sortie; cette méthode expérimentale reprend l'idée de la boîte noire où on ne cherche pas à représenter exactement ce qui se passe à l'intérieur du système mais uniquement le comportement entrée/sortie d'un point de vue macroscopique. Elle permet d'obtenir un **modèle de représentation** ou **modèle de conduite**. Notons qu'on parle de **modèle de connaissance** lorsque la représentation mathématique de l'objet étudié est obtenue à partir des lois physiques régissant la dynamique du procédé.

Tout algorithme récurrent d'identification possède la même forme générique suivante :

$$\begin{bmatrix} \text{nouveau} \\ \text{paramètre} \\ \text{estimé} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{paramètre} \\ \text{estimé} \\ \text{actuel} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{gain} \\ \text{scalaire} \\ \text{borné} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \text{fonction} \\ \text{du} \\ \text{régresseur} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \text{fonction} \\ \text{de l'erreur} \\ \text{de prédiction} \end{bmatrix}$$

Nous explicitons ces termes à l'aide de l'algorithme des moindres carrés récurrents (RLS) :

- Modèle du procédé

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d)$$

où q^{-1} est l'opérateur retard défini par : $q^{-1}y(t) = y(t-1)$

On peut également l'écrire sous la forme

$$y(t) = \phi^T(t)\theta$$

- Le vecteur paramètre formé des éléments des polynômes A et B

$$\theta^T = [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m]$$

- Le régresseur (ou vecteur de mesure)

$$\phi^T(t) = [-y(t-1), \dots, -y(t-n), u(t-d), \dots, u(t-d-m)]$$

- L'actualisation des paramètres

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t)\phi(t)(y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1))$$

- L'actualisation de la matrice de covariance

$$P(t) = \left(P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)}{1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} \right)$$

A cause de la soustraction dans le second membre de cette dernière équation, la capacité d'adaptation du RLS diminue avec le temps. Cet algorithme n'est pas capable d'identifier des paramètres variables. Le chapitre 4 sera dédié à des alternatives qui visent à pallier ce défaut. En outre, nous proposons dans ce mémoire une méthode algorithmique d'identification des incertitudes paramétriques. Contrairement aux travaux récents dans ce domaine, notre algorithme fournira une estimation des incertitudes paramétriques et laissera intacte la poursuite des variations paramétriques.

1.3 MOTIVATIONS ET OBJECTIFS DU TRAVAIL

La notion de robustesse apporte une nouvelle manière de trancher dans le compromis habituel stabilité/précision car des options trop confortables du point de vue de la marge de stabilité sont en général très sensibles. Enfin, l'imposition d'une certaine robustesse permet de maintenir une dynamique «tolérable» en cas de déficience d'une partie des boucles de contre-réaction. On dispose ainsi d'un moyen plus formel pour traiter les tolérances de pannes des systèmes asservis.

Plusieurs axes d'investigation aboutissent à l'idée centrale de ce travail, avec des résultats originaux dont nous résumons les trois points clés :

- a) Comme un régulateur robuste exploite explicitement les incertitudes du procédé, il faut formaliser ces incertitudes soit par modélisation directe, soit par identification. Une nouvelle idée pour estimer l'incertitude paramétrique est donnée au chap. 4.
- b) Pour «construire» un système de réglage robuste, un concept local basé sur des fonctions de sensibilité suffit en cas de petites fluctuations du modèle paramétrique. Nous avons exploité cette idée au chap. 2 pour mettre au point un nouveau principe de réglage par la mise en cascade d'un relais avec un compensateur de type PID.
- c) Si d'importantes variations ont effectivement lieu, on doit caractériser une robustesse basée sur la globalité des incertitudes. On est amené, dans ce cas, à résoudre de la meilleure façon possible un compromis stabilité/performance. En premier lieu, nous utilisons un modèle d'incertitude paramétrique qui s'incorpore directement dans une nouvelle méthode de synthèse robuste d'un régulateur de type RST. Une autre alternative, que nous proposons en complément dans le chap. 3, utilisera une émulation de la perturbation généralisée obtenue par des schémas inspirés des réglages IMC ou GPC. Cette méthode va aboutir à la factorisation de Youla *et al.* (1976) du régulateur RST.

1.4 PLAN DE LA THESE

Le **chapitre 2** aborde l'étude de la robustesse par rapport aux modèles de procédé à variations infinitésimales. On incorpore pour ce faire la sensibilité du procédé sous plusieurs formes : la sensibilité absolue débouche sur un signal supplémentaire généré par l'écart de coefficient tandis que la sensibilité relative se base essentiellement sur les fonctions de sensibilité ***S*** (appelée par abus de langage *sensibilité*) et ***T*** (dénommée *sensibilité complémentaire*). Sur la base de ces deux fonctions, nous avons proposé des structures de réglage intrinsèquement insensibles. Les régulateurs IMC ou GPC possèdent cette prédisposition, d'où notre intérêt pour fournir des compléments de résultats concernant ces régulateurs. Nous présentons ensuite succinctement une forme particulière de sensibilité, qui met en jeu l'ordre du système, appelée *perturbation singulière*. Une démonstration formelle sur la viabilité des régulateurs du type relais-PID terminera ce chapitre.

Le **chapitre 3** décrit en deux étapes les démarches de robustification d'un régulateur polynomial de type RST :

1. Synthèse RST avec test sur une borne d'incertitude : Nous délimitons le domaine possible de placement de pôles entre les stratégies *mean level* (pôles en boucle fermée correspondant à ceux du processus nominal en boucle ouverte) et *dead beat* (tous les pôles en boucle fermée en $z = 0$). Ensuite, nous proposons une borne de robustesse incorporant le régulateur à deux degrés de liberté RST. Le choix du polynôme observateur A_{obs} permet de scruter notre domaine de placement de pôles. Le choix définitif est dicté

par la condition de bornitude liée à la connaissance de l'incertitude. C'est le premier volet de notre contribution originale en réglage robuste.

2. Régulateur robuste basé sur un modèle d'incertitude : En gardant le formalisme polynomial, nous commençons par modéliser le procédé incertain. Le régulateur est à deux degrés de liberté et comporte un terme supplémentaire de compensation de la perturbation généralisée constituée du bruit de mesure et du signal supplémentaire dû aux erreurs paramétriques. Le schéma de réglage obtenu correspond à la paramétrisation de Youla du régulateur RST.

Le **chapitre 4** est dédié à l'identification de procédés à grandes variations paramétriques. Nous présentons au préalable un certain nombre de résultats inhabituels sur la relecture de l'algorithme des moindres carrés récurrents **RLS**. Nous proposons ensuite une méthode originale d'estimation de la covariance. Cette grandeur nous permettra d'abord d'améliorer l'estimation de paramètres à grandes variations; ensuite, elle servira à estimer les incertitudes paramétriques.

A la fin de chaque chapitre se trouvent des exemples simulés ou des applications expérimentales pour illustrer nos résultats. Enfin, un bilan et une conclusion générale de ce travail constituent le **chapitre 5**.

REFERENCES

- Ackermann J. (1980), *"Parameter Space Design of Robust Control System"*, IEEE-TAC, AC-25, pp. 1058-1072.
- Cobb J. D. (1988), *"Linear Compensator Designs Based Exclusively on Input-Output Information are Never Robust with Respect to Unmodelled Dynamics"*, IEEE-TAC, AC-33, pp. 559-563.
- Rohrs C. E., Valavani L., Athans M., & Stein G. (1985), *"Robustness of Continuous-time Adaptive Control Algorithms in the Presence of Unmodelled Dynamics"*, IEEE-TAC, AC-30, pp. 881-889.
- Tsytkin Ya. Z. (1991), *"On Robust Adaptive Control Systems under Bounded Uncertainty"*, 9th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Budapest.
- Youla D. C., Jabr H. A. & Bongiorno J.J. (1976), *"Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers - Part II : The Multivariable Case"*, IEEE-TAC, AC-21, pp. 319-338.
- Zames G. (1981), *"Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses"*, IEEE-TAC, AC-11, pp. 228-238.

REGLAGE INSENSIBLE

INTRODUCTION

On peut aborder la résolution d'un problème de réglage robuste en considérant la perturbation paramétrique faible. C'est un **concept local** de la robustesse axé sur l'étude de la sensibilité du système asservi. Nous allons brièvement passer en revue plusieurs formes de sensibilités différentielles. Nous construirons ensuite un schéma fonctionnel combiné pour générer des fonctions particulières de sensibilité relative qui pourront servir à affiner les paramètres d'un régulateur existant. Ensuite, nous nous intéresserons à des structures de réglage intrinsèquement insensibles à une petite variation du procédé. Nous procéderons à l'analyse globale d'un régulateur à gain élevé en séparant les phénomènes lents et rapides. Par la même occasion, nous déduirons une méthode de synthèse plus globale, robuste en stabilité et, dans une moindre mesure, robuste en performance. Les différentes étapes de notre étude sont brossées dans le tableau 2.1; les parties grisées représentent notre contribution personnelle.

Tab. 2.1 : Concept local de réglage robuste

	SENSIBILITE DIFFERENTIELLE	SENSIBILITE STRUCTURELLE	STRUCTURES INSENSIBLES
CADRE	Effet des variations paramétriques	Régulateurs à gain élevé	Fonctions de sensibilité S et T
METHODE	Générer les sensibilités à l'aide de schémas fonctionnels	Séparer les dynamiques lente et rapide (perturbation singulière)	Utiliser un schéma de réglage qui se prête à la réduction de S
RESULTATS	Ajustement des paramètres d'un régulateur PID	Robustesse et performance avec un régulateur relais + PID	Schémas de réglage intrinsèquement insensible
CONTENU DU CHAPITRE	§ 2.1.1A Revue des différentes fonctions de sensibilité	§ 2.1.2 Rappel de la théorie des perturbations singulières	Section 2.2 Réduction possible du numérateur de S
	§ 2.1.1B Application à la synthèse de régulateur	Section 2.4 Analyse du régulateur relais-PID	§ 2.2.2A Gain élevé approché par un relais

2.1 FORMES DE SENSIBILITES

PRELIMINAIRES :

L'étude de la sensibilité a toujours intéressé les automaticiens et particulièrement Bode vers 1945. De plus en plus, l'analyse et la synthèse des systèmes asservis sont basés sur des modèles paramétriques. Ainsi, toute variation du système peut être imputée à une variation paramétrique. La sensibilité différentielle est un bon outil pour appréhender les incertitudes paramétriques infinitésimales. Mais on peut obtenir, par cette méthode, une bonne approche de variations plus réalistes.

Nous commençons (§ 2.1.1) par définir trois formes de sensibilité. Le signal généré par la variation paramétrique est obtenu par la dérivée de ce signal par rapport au paramètre considéré. Ensuite (§ 2.1.2), nous proposons une méthode pour générer ce signal supplémentaire à l'aide d'un schéma fonctionnel approprié. Le signal ainsi généré sera utilisé pour affiner les paramètres d'un régulateur. Nous rappellerons (§ 2.1.3), de façon très condensée, l'essentiel de la théorie des perturbations singulières. Cette théorie sera utilisée (Section 2.3) pour démontrer la robustesse et la performance d'un PID placé en cascade avec un relais.

La théorie de la sensibilité a des impacts dans beaucoup de domaines de l'automatique. Ngo (1971) a utilisé une approche par la sensibilité pour analyser les dépassements de la réponse d'un système. Il a proposé une méthode de synthèse qui associe les réponses temporelles du système. Kokotovic et Rutman (1965) ont fait un tour guidé de toutes les utilisations de la sensibilité dans des domaines très divers tels que l'optimisation, la commande adaptative et la perturbation singulière. Plus récemment, Vilenius (1983) utilise une analyse de sensibilité pour déterminer l'effet des non linéarités sur un asservissement de position d'un système hydraulique.

2.1.1 Sensibilités différentielles

A. Fonctions de sensibilité

Il est important de distinguer les perturbations causées par des variations de paramètres isolés de celles résultant de la variation d'une fonction de transfert.

Effets de la variation d'un paramètre scalaire :

Considérons un système dynamique dont la réponse $y(t, \theta)$ est caractérisée par le vecteur paramètre θ . On peut utiliser un développement en série de Taylor pour évaluer l'effet d'une variation paramétrique sur la réponse de ce système :

$$y(t, \theta + \delta\theta) = y(t, \theta) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial \theta_i} \delta\theta_i + \dots \quad (2.1)$$

La quantité $\sigma_i(t) = \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial \theta_i}$ (2.2)

est appelée *sensibilité absolue* de la réponse $y(t)$ par rapport au paramètre θ_i .

En première approximation, la réponse supplémentaire due à $\delta\theta_i$ s'obtient par

$$\delta y_i \approx \sigma_i \delta\theta_i \quad (2.3)$$

Cette sensibilité absolue peut être rapportée à la valeur du paramètre dont elle est issue. On obtient ainsi la *fonction de sensibilité semi-relative* :

$$\sigma_i^0(t) = \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial \ln \theta_i} = \theta_i \sigma_i \quad (2.4)$$

Cette mesure est utile pour le calcul de la perturbation du système par rapport à une variation relative de θ_i .

$$\begin{aligned} y(t, \theta_i [1 + c_i]) - y(t, \theta_i) &\approx \theta_i \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial \theta_i} c_i \\ &= \sigma_i^0 c_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

Effets de la variation d'une fonction de transfert :

Bode a proposé d'utiliser la *fonction de sensibilité relative* pour étudier l'effet de la variation de la fonction de transfert $H(s)$ sur la fonction de transfert $G(s)$.

$$S(s) = \frac{\partial \ln G(s)}{\partial \ln H(s)} \quad (2.6)$$

Pour un système bouclé (fig. 2.1), cette équation peut être utilisée pour traduire l'effet d'une variation du processus à régler sur la boucle fermée. Cette sensibilité s'exprime à l'aide du gain en boucle ouverte $L(s) = K(s)P(s)$:

$$S(s) = \frac{\partial \ln [L(s) / 1 + L(s)]}{\partial \ln P(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (2.7)$$

On peut également utiliser la *fonction de sensibilité complémentaire*, dénotée $\mathcal{T}(s)$ et définie comme suit :

$$\mathcal{T}(s) + S(s) = 1 \quad (2.8)$$

D'après (2.7) et (2.8), on a

$$\mathcal{T}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (2.9)$$

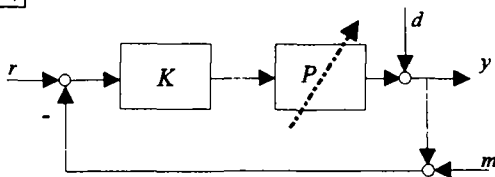


Fig. 2.1 : Schéma d'une boucle de contre-réaction

Remarque 2.1

- Par abus de langage, la fonction de sensibilité $\mathcal{S}(s)$ est appelée simplement la *sensibilité*. Cette fonction est bien le résultat de la dérivation (2.6) pour

$$G(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad \text{et} \quad H(s) = P(s) \quad (2.10)$$

- Il y a deux autres interprétations possibles de $\mathcal{S}(s)$:

a) C'est une indication de performance en terme d'erreur d'asservissement :

$$\frac{e}{r-d} = \mathcal{S} \quad (2.11)$$

b) C'est une autre indication de performance en terme d'erreur de régulation :

$$\frac{y}{d} = \mathcal{S} \quad (2.12)$$

- $\mathcal{T}(s)$ représente également la fonction de transfert en boucle fermée du système asservi.

Equations de sensibilité et généralisation :

Pour plus de généralité, considérons un système non linéaire décrit par

$$\dot{x} = f(x, u, t, \theta) \quad (2.13)$$

La sensibilité de l'état x_i par rapport au paramètre θ_j est définie par

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{\partial x_i(t)}{\partial \theta_j} \quad (2.14)$$

L'équation (2.13) écrite pour x_i peut être dérivée par rapport à θ_j . Après arrangement, on obtient l'équation de sensibilité :

$$\frac{d}{dt} \sigma_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \sigma_{kj} \quad (2.15)$$

Cette équation de sensibilité a été utilisée dans des applications telles que des problèmes d'optimisation ou de commande adaptative dans Kokotovic & Rutman (1965), de l'étude des réseaux de neurones dans Narendra & Parthasarathy (1990).

B. Application de la sensibilité à la synthèse de régulateur

On serait tenté de résoudre analytiquement les équations (2.13) et (2.15) pour évaluer les sensibilités d'un système. Mais, il est plus intéressant de les approximer numériquement en simulation comme nous allons le montrer.

Evaluation de la sensibilité absolue :

Nous suggérons l'utilisation d'un modèle dynamique étendu pour générer les signaux correspondant aux différentes fonctions de sensibilité dont on a besoin.

Considérons un système dynamique donné par sa fonction de transfert

$$P(z, \theta_i) = \frac{y(z)}{u(z)} \quad (2.16)$$

On essaie d'isoler (sans le déconnecter du circuit) le paramètre sujet à une variation.

Soit $w(z)$ le signal (interne au système) qui transite par θ_i . Une petite variation $\delta\theta_i$ de θ_i provoque les variations respectives $\delta w_i(z)$ et $\delta y(z)$ représentées sur les figures 2.2 et 2.3.

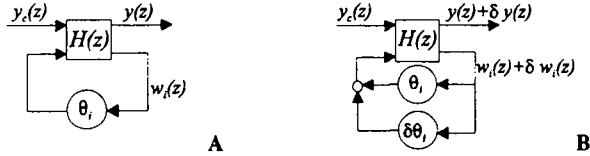


Fig. 2.2 : Visualisation du signal associé au paramètre incertain

Après arrangement, la forme équivalente fait apparaître un signal d'entrée supplémentaire associée à la variation paramétrique $\delta\theta_i(z)$ (Fig. 2.3)

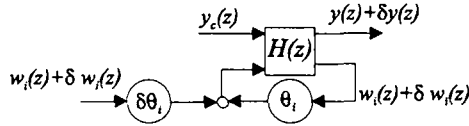


Fig. 2.3 : Réarrangement d'un système dynamique paramétriquement perturbé

En négligeant $\delta w_i(z)\delta\theta_i(z)$ qui est un infiniment petit du second ordre, la figure 2.3 peut s'écrire sous la forme du schéma fonctionnel combiné de la figure 2.4 qui, pour $\delta\theta_i(z) = 1$, permet de générer directement la fonction de sensibilité absolue $\sigma_i(z) = \frac{\partial y(z)}{\partial \theta_i(z)}$. Le signal

$w_i(z)$ est accessible au point (II) appelé point de sensibilité du système nominal.

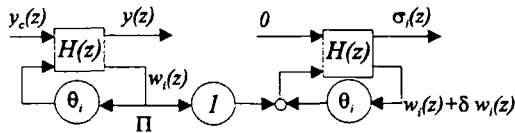


Fig. 2.4 : Schéma fonctionnel pour générer $\sigma_i(z) = \frac{\partial y(z)}{\partial \theta_i(z)}$

Utilisation de σ_i :

Sur la base d'un exemple, nous allons illustrer une utilisation pratique des fonctions de sensibilité simulées. Elle consiste en l'affinage des paramètres d'un régulateur PID.

Un servomécanisme de laboratoire, modélisé comme suit :

$$P(s) = \frac{0.525}{s(0.682s + 1)} \quad (2.17)$$

est réglé par un régulateur PID de paramètres :

$$k_p = 5.0; \quad t_d = 0.4 \quad ; \quad t_i = 1.6 \quad (2.18)$$

Le schéma fonctionnel combiné (fig. 2.5) du système nominal et du modèle de sensibilité a été construit à l'aide de *SIMULINK*, l'interface graphique de *MATLAB*.

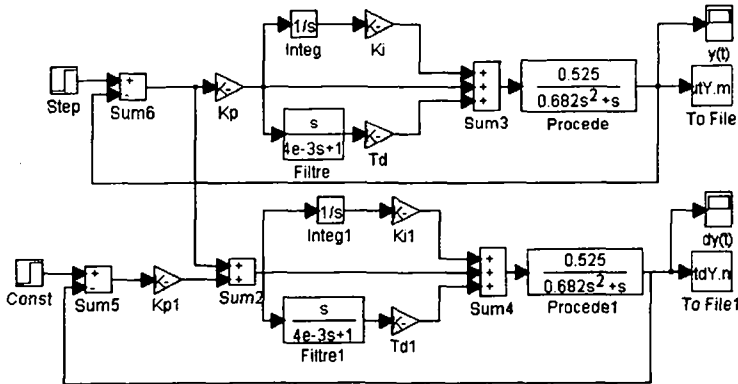


Fig. 2.5 : Schéma fonctionnel combiné pour l'étude de l'effet de δk_p

Ce schéma (et les autres relatifs à δt_i et δt_d) permettent de générer les fonctions de sensibilité du système en boucle fermée par rapport aux variations des paramètres k_p , t_d et t_i (figures 2.6 A, B et C).

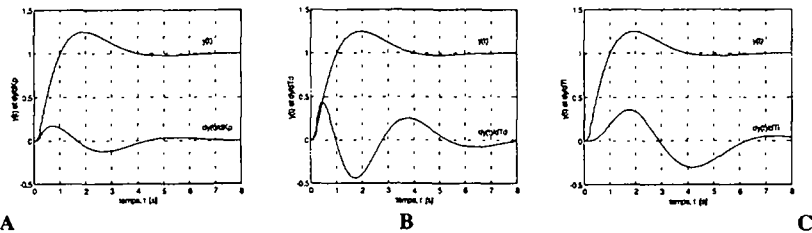


Fig. 2.6 Réponses indicielles et fonctions de sensibilité par rapport à k_p (A), t_d (B), t_i (C)

Remarque 2.2

Dans chaque cas, si les deux courbes ont les mêmes sens de variation, une variation positive du paramètre provoquera une augmentation de l'amplitude du signal supplémentaire en sortie. Ces trois figures exhibent deux zones d'intérêt :

a) **Zone I** : intervalle 0 - 1[s]

Dans cette période initiale, le régulateur devrait assurer la rapidité de la réponse $y(t)$. Une sensibilité positive importante correspond à un renforcement de cet effet au cas où on augmente la valeur du paramètre correspondant.

b) **Zone II** : intervalle 1 - 3[s]

C'est la période où a lieu le premier dépassement. Une valeur négative de la sensibilité correspond à l'atténuation du dépassement si on augmentait la valeur du paramètre correspondant.

On constate que l'effet des trois termes sont différents. Dans la **zone I**, tous les coefficients ont tendance à accélérer la réponse du système, sauf pour l'intégrateur dont l'effet n'est pas significatif à l'instant initial. Dans la **zone II**, le terme intégral, dont la fonction de sensibilité est quasiment en phase avec la réponse indicielle, a tendance à aggraver le dépassement. Dans cette même zone, le terme dérivé dont la fonction de sensibilité varie à l'opposé de la réponse indicielle, aura tendance à apporter une diminution du dépassement.

De telles analyses de sensibilité se prêtent bien à la synthèse du régulateur d'un système asservi dont la performance est spécifiée comme une enveloppe prédéterminée de réponses temporelles. De telles spécifications sont suggérées dans Boyd et Barrat (1991).

2.1.2 Sensibilité structurelle

Cette section introduit les équations de sensibilité qui décrivent les variations du vecteur d'état par rapport au changement de l'ordre du système. La présentation de cette matière — dénommée *perturbation singulière* — dans les manuels ou publications spécialisés n'est pas triviale. Nous présentons brièvement, et sans démonstration, l'essentiel de la théorie linéaire qui sera utilisée dans des développements du dernier paragraphe de ce chapitre. Le lecteur intéressé aux détails peut se reporter à Kokotovic *et al.* (1986).

Caractérisation :

Le changement de structure est caractérisé par la variation d'un paramètre à faible valeur ε :

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}z + B_1u \quad \text{avec} \quad x(t=0) = x_0 \quad (2.19a)$$

$$\varepsilon \dot{z} = A_{21}x + A_{22}z + B_2u \quad z(t=0) = z_0 \quad (2.19b)$$

$$y = C_1x + C_2z \quad (2.19c)$$

où x : n -vecteur d'état de base

z : m - vecteur d'état supplémentaire

u : r -vecteur de commande

Etat quasi-statique et correction de la couche limite :

Une caractérisation est obtenue après séparation en un sous-système à dynamique lente (indice s pour slow) et une autre composante à dynamique rapide (indice f pour fast).

On adopte les changements de variables suivants :

$$\tau = t/\varepsilon$$

$$x(t, \varepsilon) = x_s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.20a)$$

$$z(t, \varepsilon) = z_s(t) + z_f(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.20b)$$

$$y(t, \varepsilon) = y_s(t) + y_f(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.20c)$$

$$u(t, \varepsilon) = u_s(t) + u_f(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.20d)$$

$\mathcal{O}(\varepsilon)$ est une grandeur du même ordre que ε , $\varepsilon \rightarrow 0$.

1. Sous-système lent : $\boxed{\varepsilon = 0}$ (appelé *système dégénéré* ou *état quasi-statique*)

En faisant tendre ε vers 0, on obtient le système dynamique dégénéré (dynamique lente) qui définit les nouvelles variables

$$\dot{x}_s = A_0 x_s + B_0 u_s \quad (2.21a)$$

$$z_s = -A_{22}^{-1} [A_{21} x_s + B_2 u_s] \quad (2.21b)$$

$$y_s = C_0 x_s + D_0 u_s \quad (2.21c)$$

avec

$$A_0 = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$$

$$B_0 = B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2$$

$$C_0 = C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}$$

$$D_0 = -C_2 A_{22}^{-1} B_2$$

2. Sous-système rapide : $\boxed{\tau = \frac{t}{\varepsilon}}$ (*correction de la couche limite* — boundary layer —)

Avec $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient le sous-système rapide

$$\frac{dz_f}{d\tau} = A_{22} z_f(\tau) + B_2 u_f(\tau) \quad (2.22a)$$

$$y_f(\tau) = C_2 z_f(\tau) \quad (2.22b)$$

Propriétés :

Les équations (2.21) et (2.22) servent à l'analyse des systèmes singulièrement perturbés. Nous donnons les trois propriétés fondamentales de ce type de système.

1. Gouvernabilité :

Si les sous-systèmes (2.21) et (2.22) sont gouvernables i.e.

$$\text{rang} \{ [B_0 \mid A_0 B_0 \mid \dots \mid A_0^{n-1} B_0] \} = n \quad (2.23a)$$

$$\text{rang} \{ [B_2 \mid A_{22} B_2 \mid \dots \mid A_{22}^{m-1} B_2] \} = m \quad (2.23b)$$

et si A_{22} est non singulière,

alors $\exists \varepsilon_0 > 0$ | le système global est gouvernable pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

2. Observabilité :

Si les sous-systèmes (2.21) et (2.22) sont observables i.e.

$$\text{rang} \left\{ \begin{bmatrix} C_0 \\ C_0 A_0 \\ \dots \\ C_0 A_0^{n-1} \end{bmatrix} \right\} = n \quad (2.24a)$$

$$\text{et } \text{rang} \left\{ \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A_{22} \\ \dots \\ C_2 A_{22}^{m-1} \end{bmatrix} \right\} = m \quad (2.24b)$$

alors $\exists \epsilon_I > 0$ | le système global est observable pour $0 < \epsilon \leq \epsilon_I$

3. Stabilité :

Si $\Re\{\lambda_i[A_{22}]\} < 0$ et si le système dégénéré est asymptotiquement stable

alors $\exists \epsilon^* > 0$ | le système global est asymptotiquement stable pour $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$

Il existe des méthodes, e.g. de Lyapounov, qui permettent de déterminer les valeurs limites ϵ_0 , ϵ_I et ϵ^* .

Remarque 2.3

- Il existe une version discrète de la méthode des perturbations singulières. La démarche d'analyse et de synthèse est identique à celle du domaine analogique mais le développement est plus rébarbatif.
- Signalons que la démarche habituelle en automatique correspond à négliger les modes rapides. En terme de perturbation singulière, cela correspond à prendre $\epsilon = 0$.
- Le réel problème dans cette discipline consiste à trouver la bonne modélisation qui se prête à un découplage rapide/lent.
- Une fois la modélisation maîtrisée, on arrive très bien à synthétiser un système **de réglage insensible à la variation de l'ordre du système**.

2.2 STRUCTURES DE REGLAGE INSENSIBLE

Par rapport à la fonction de transfert du système bouclé, l'effet de la variation du procédé se traduit par la sensibilité S (c.f. éq. 2.7). Nous suggérons d'approcher le cas idéal de régulation qui correspond à l'annulation de S (§ 2.2.1). Les régulateurs qui s'y prêtent (dans certaines plages de fréquences) ont soit un gain infini, soit une boucle de contre réaction positive. Nous montrerons (§ 2.2.2) que les régulateurs IMC et GPC sont équivalents à une contre-réaction positive. Nous fournirons (§ 2.2.3) des résultats originaux qui approfondissent les manières de bien choisir les paramètres de synthèse d'un GPC.

2.2.1 Sensibilité et performance

La performance d'un asservissement au regard de sa capacité de poursuite et de rejet de perturbation peut être exprimée en terme de fonction de sensibilité relative. Pour considérer un cas général, on adopte d'emblée un *régulateur à deux degrés de liberté* (figure 2.7).

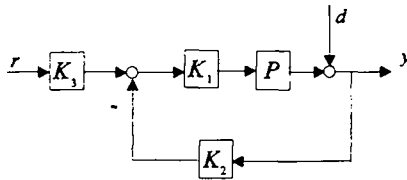


Fig. 2.7 : Schéma d'asservissement à deux degrés de liberté

Qualité de réglage :

Pour pouvoir ajuster les caractéristiques d'asservissement (poursuite de la consigne r) et agir indépendamment sur la régulation (rejet de la perturbation d), il a fallu ajouter les blocs K_2 et K_3 . Si on définit l'erreur de réglage par

$$e = r - y \quad (2.25a)$$

Morari et Zafiriou (1989) montrent les deux degrés de liberté d'un tel schéma de réglage à l'aide de la relation suivante:

$$e = \frac{1}{1 + PK_1K_2} d + \left[\frac{PK_1K_3}{1 + PK_1K_2} - 1 \right] r = S d + (T - 1) r \quad (2.25b)$$

En pratique, on choisit d'abord K_1K_2 pour bien rejeter la perturbation d . Ensuite, on peut fixer librement le préfiltre K_3 pour une bonne poursuite de consigne. Le *système de réglage parfait* correspondrait aux cas suivants :

$$S = 0 \quad \text{et} \quad T = 1 \quad (2.26)$$

Remarque 2.4

Cette condition ne sera jamais globalement satisfaite pour n'importe quelle fréquence car tout système strictement propre satisfait

$$\lim_{s \rightarrow \infty} P(s) = 0$$

Par conséquent, à haute fréquence, les valeurs des sensibilités sont exactement à l'opposé de ce que l'on aimerait avoir :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} S(s) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} T(s) = 0$$

Le réglage insensible suggéré par (2.26) n'est qu'un cas idéal. On peut mettre à profit le théorème de Bode (Bourlès, 1993) pour délimiter les fréquences où l'on peut avoir un faible module de S et celles où inévitablement le module est grand.

2.2.2 Construction de régulateurs intrinsèquement insensibles

La démarche de synthèse vise à établir une structure de réglage qui permette de réduire S . Dans ces conditions, les régulateurs sont robustes par rapport aux variations infinitésimales du procédé. C'est un **concept local** de robustesse.

A. Régulateur à gain élevé

Depuis trois décennies, on utilise les régulateurs à structure variable basés sur la commutation par rapport à un hyper-plan judicieusement choisi. Il a été démontré qu'un tel système de réglage est invariant par rapport aux paramètres du procédé qui doit être à dépasage minimal.

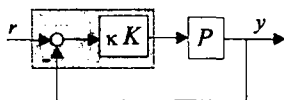


Fig. 2.8 : Régulateur conventionnel à gain élevé

La fonction de sensibilité est immédiate

$$S = \frac{1}{1 + \kappa KP} \quad (2.27)$$

A gain élevé, S et T se comportent de la manière suivante :

$$S \approx \frac{1}{\kappa KP} \quad \text{et} \quad T \approx \frac{\kappa KP}{\kappa KP} = 1$$

Par conséquent, le réglage est idéal dans les conditions suivantes :

$\kappa \rightarrow \infty, \text{ alors } S = 0 \text{ et } T = 1$	(2.28)
---	--------

Remarque 2.5

Cette situation correspond approximativement à la mise en série d'un relais et d'un PID.

Le relais est un élément non linéaire habituellement modélisé par :

$$\begin{cases} u = U_{max} & \text{si } e > 0 \\ u = -U_{max} & \text{si } e < 0 \end{cases}$$

Le rapport entre l'entrée et la sortie du régulateur s'écrit $\kappa K = \frac{U_{max}}{e}$

Si e est faible par rapport à U_{max} , ce gain κ est grand. On utilise la notation suivante :

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{e}}$$

On peut utiliser les méthodes habituelles de détermination des paramètres du régulateur, tel que celle de Ziegler-Nichols. On place ensuite en amont de ce PID un relais (ou toutes les variantes : avec zone morte, hystérésis, etc. ...) pour autant que le système réglé (sans le relais) ait une marge de gain infinie. Si on ne satisfait pas cette dernière condition, on aura un cycle limite qui est rarement tolérable dans la pratique.

B. Contre-réaction positive

Le grief habituel opposé au réglage robuste est l'impossibilité d'imposer dans la pratique un gain infiniment grand. On peut aboutir à un régulateur à gain infini par le choix de la structure qui comporte des boucles supplémentaires dotées de gains finis, mais dont la combinaison aboutit à un gain infini. C'est le cas de la boucle interne de la figure 2.9.

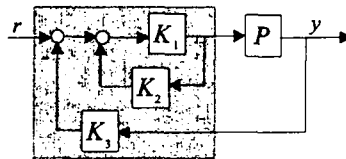


Fig. 2.9 : Régulateur à contre-réaction interne positive

La sensibilité de ce système a pour expression :

$$S = \frac{1 - K_1 K_2}{1 - K_1 K_2 + P K_1 K_3} \quad (2.29)$$

On remarque l'existence d'une soustraction au numérateur de (2.29). Par conséquent, il est possible d'avoir une sensibilité nulle avec une combinaison de K_1 et K_2 bien choisie. On déduit les conditions de réglage idéal :

$$K_1 K_2 = 1 \Rightarrow S = 0 \text{ et } T = 1 \quad (2.30)$$

Si e est la sortie du comparateur, le transfert de la boucle interne devient :

$$\frac{u}{e} = \frac{K_I}{1 - K_I K_2} \quad (2.31)$$

Pour le cas idéal, cette situation correspond à un régulateur à gain infini.

Synthèse du régulateur :

Signalons l'utilisation de cette structure de réglage pour les systèmes à retard pur :

$$P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} \quad (2.32a)$$

Pour $K_2 = (z^{-d} - 1) \frac{B(z)}{A(z)}$ et $K_3 = 1$, (2.32b)

on retrouve le prédictor de Smith. Pour terminer la synthèse, il faut encore déterminer le compensateur K_I . A part le prédictor de Smith, l'utilisation délibérée d'une contre-réaction positive est rarissime.

C. Régulateur à modèle interne ou «bloc parallèle»

L'idée d'utiliser un modèle du procédé, K_2 , en parallèle avec le procédé (fig. 2.10) permet d'avoir une synthèse relativement simple. Morari & Zafiriou (1989) en donnent une étude systématique. Nous nous bornons à montrer qu'un tel schéma s'apprête bien à une insensibilisation.

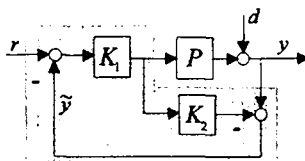


Fig. 2.10 : Régulateur à modèle interne (IMC)

Après quelques manipulations algébriques, on a l'expression de la sensibilité :

$$S = \frac{1 - K_I K_2}{1 - K_I K_2 + P K_I}$$

Par conséquent, les conditions de réglage idéal sont

$K_I K_2 = 1 \Rightarrow S = 0 \text{ et } T = 1$	(2.33)
---	--------

Un réarrangement du bloc parallèle K_2 aboutit au régulateur équivalent à contre-réaction positive :

$$K = \frac{K_I}{1 - K_I K_2} \quad (2.34)$$

On constate aussi que pour cette configuration, la condition d'insensibilité correspond, comme précédemment, à un régulateur à gain infini.

D. Régulateur prédictif ou «bloc série-parallèle»

Le régulateur prédictif du type GPC (*Generalized Predictive Control*) est la forme ultime du régulateur à variance minimale. La théorie qui sous-tend la construction et les qualités d'un tel système de réglage est foisonnante. On se rend compte qu'un tel régulateur revient à utiliser un modèle série-parallèle du procédé (fig. 2.11) (Piguet, 1991). Cette même référence montre que le régulateur est peu robuste par rapport aux incertitudes paramétriques. Nous présenterons au § 2.2.3, des détails supplémentaires et quelques résultats extensifs sur le GPC.

La sensibilité de ce système est

$$S = \frac{1 - K_1 K_2}{1 - K_1 K_2 + P K_1 K_3} \quad (2.35)$$

On en déduit la condition de réglage idéal :

$$K_1 K_2 = 1 \Rightarrow S = 0 \text{ et } T = 1 \quad (2.36)$$

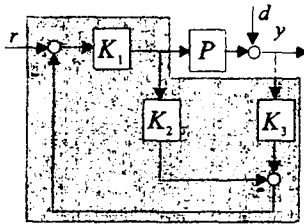


Fig. 2.11 : Régulateur à modèle série-parallèle

Après transformation de ce schéma, on peut également retrouver une contre-réaction positive, ou un régulateur à gain infini.

2.3 ETUDE DU GPC

A notre avis, le GPC est un cas particulièrement très important de cette structure série-parallèle et mérite une attention particulière. D'après ce que nous venons de présenter, l'insensibilité de ce schéma de réglage (et sa robustesse dans une certaine mesure) provient de sa structure même. Nous donnerons un bref rappel de la théorie du GPC au début de cette section. Nous fournirons ensuite quelques résultats originaux (§ 2.3.2) qui permettent de mieux analyser les effets des paramètres de synthèse de ce régulateur. Nous terminerons cette partie qui traite du GPC par un exemple pratique de synthèse (§ 2.3.3). Nous nous attarderons sur l'étude de ce régulateur car sa structure nous inspirera pour émuler une perturbation généralisée qui, une fois compensée, robustifiera un régulateur à deux degrés de liberté du type RST (Chap. 3).

2.3.1 Réalisation du GPC

Le régulateur GPC élabore la commande présente, non seulement sur la base des valeurs passées de l'erreur, mais également sur des valeurs futures fournies par un prédicteur.

Terminologie :

Pour le régulateur

- $[t + N1, t + N2]$: horizon de coût
- $[t, t + NU - 1]$: horizon de commande
- λ : pondération de la commande
- K : matrice de gain du régulateur

La figure 2.12 permet de mieux appréhender la signification et le rôle des paramètres.

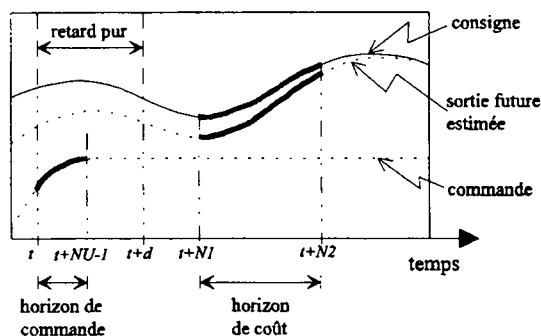


Fig. 2.12 : Signaux temporels caractérisant le GPC

Pour le modèle

- vecteur des sorties futures estimées :

$$\hat{y} = [\hat{y}(t+NI/t) \quad \hat{y}(t+NI+1/t) \quad \dots \quad \hat{y}(t+NI+NU-1/t)]^T$$

- vecteur des incréments de commande futurs estimés :

$$\Delta \hat{u} = [\Delta \hat{u}(t) \quad \Delta \hat{u}(t+1) \quad \dots \quad \Delta \hat{u}(t+NU-1)]^T$$

- vecteur des réponses libres du système :

$$p = [p_{N1}(t) \quad \dots \quad p_{N2}(t)]^T$$

- matrice des séquences de la réponse indicielle du procédé :

$$G \quad \text{avec} \quad \dim G = (N2 - N1 + 1) \times NU \quad \text{et} \quad \dim g = N2 - N1 + 1$$

- matrices de prédiction construites à partir des coefficients $B(z)$ et $A(z)$ du procédé :

$$\Phi \quad \text{avec} \quad \dim \Phi = N2 \times \deg A$$

$$\Psi \quad \text{et} \quad \dim \Psi = N2 \times (\deg B + d)$$

- équation du prédicteur :

$$\hat{y} = G \Delta \hat{u} + p$$

- vecteur des consignes prédéfinies :

$$w$$

On se base sur deux suppositions pour la réalisation du GPC :

a) La connaissance à l'avance du signal de consigne; pratiquement, c'est souvent le cas en automatique.

b) Une bonne caractérisation du procédé à l'aide du numérateur $B(z)$, du dénominateur $A(z)$ et du retard pur d .

On a le **terme de prédiction** p

$$p = \Phi y + \Psi u \quad (2.37a)$$

On prédit la **sortie future** d'après

$$\hat{y} = G \Delta \hat{u} + p \quad (2.37b)$$

on construit l'**erreur de prédiction**

$$\hat{e} = w - \hat{y} \quad (2.37c)$$

Les développements détaillés sur la synthèse du GPC se trouvent dans Clarke et Mohtadi (1989). En gros, c'est le résultat d'une optimisation basée sur le principe du minimum de variance généralisé dans les fenêtres $[N1 \ N2]$ pour l'erreur et $[0 \ NU-1]$ pour la commande.

On utilise la fonction coût suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \sum_{i=N1}^{N2} [\hat{e}(t+i)]^2 + \lambda \sum_{i=1}^{NU} [\Delta \hat{u}(t+i-1)]^2 \\ &= (w - G \Delta \hat{u} - p)^T (w - G \Delta \hat{u} - p) + \lambda \Delta \hat{u}^T \Delta \hat{u} \end{aligned} \quad (2.38a)$$

qui doit être minimisée par rapport aux incréments de commande $\Delta \hat{u}$. A partir de

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Delta \hat{u}} = 0 \quad (2.38b)$$

on obtient les incréments de commande optimale

$$\Delta \hat{u}_{opt} = K w - K \Phi y - K \Psi u \quad (2.38c)$$

Malgré les développements complexes qui ont permis d'aboutir à ce régulateur, sa synthèse "ne dépend que" du choix des trois paramètres suivants :

- l'**horizon de coût** qui est une fenêtre (de l'instant $t = N1$ à $t = N2$) dans laquelle les erreurs quadratiques futures sont estimées,
- l'**horizon de commande** (de l'instant $t = 0$ à $t = NU-1$) dans laquelle les commandes présentes et futures sont estimées. A partir de $t = NU$, les incréments de commande à appliquer sont nuls,
- la **pondération** λ que nous étudierons, ultérieurement, plus en détail.

La **matrice de gain** K est calculée par la formule

$$\boxed{K = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T} \quad (2.39)$$

où $\dim K = NU \times (N2 - N1 + 1)$.

On s'intéresse seulement à l'incrément de commande à appliquer à l'instant présent. C'est-à-dire que pour implanter le régulateur, on n'utilise que la première ligne de la matrice K ; d'où l'**équation du régulateur GPC** :

$$\Delta \hat{u}_{opt} = k^T w - k^T \Phi y - k^T \Psi u \quad (2.40)$$

Pour les systèmes monovariables, cette commande est un scalaire. Cette équation permet de tracer le schéma fonctionnel du GPC donné à la figure 2.13.

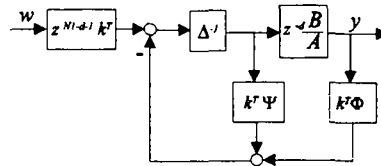


Fig. 2.13 : Schéma fonctionnel de principe du GPC

On en déduit la **fonction de transfert du système réglé par un GPC**, qui a pour équation

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{z^{N1-d-1} B(z) K(z)}{A(z) (\Delta + [k^T \Psi] z) + z^{-d-1} B(z) [k^T \Phi] z} \quad (2.41)$$

où

$$\begin{aligned} K(z) &= k_{N1} z^{N1} + \dots + k_{N2} z^{N2} \\ [k^T \Phi](z) &= [k^T \Phi]_1 z^{-1} + \dots + [k^T \Phi]_{deg A} z^{-deg A} \\ [k^T \Psi](z) &= [k^T \Psi]_1 z^{-1} + \dots + [k^T \Psi]_{deg B+d} z^{-deg B-d} \end{aligned}$$

$[k^T\Phi](z)$ et $[k^T\Psi](z)$ représentent le prédicteur. (Clarke et Mohtadi, 1989) ont proposé des algorithmes pour calculer les matrices G , Φ , Ψ , et les polynômes $[k^T\Phi](z)$ et $[k^T\Psi](z)$.

Remarque 2.5

- Le terme z^{N1-d-1} dans le préfiltre signifie que la consigne du GPC est avancée, d'où la nécessité de connaître cette consigne à l'avance.
- Les matrices Φ et Ψ sont les composantes du prédicteur. On peut les interpréter comme l'équivalent d'un modèle série-parallèle de $A(z)$ et de $B(z)$ du procédé.
- Les incréments de commande signifient que le GPC contient un intégrateur par conception. Sur la figure 2.13, l'intégrateur est représenté par Δ^{-1} dans la chaîne directe; en réalité, l'intégrateur ne permet pas de compenser des signaux de perturbations constantes en sortie.

Le lecteur désireux d'approfondir la théorie des prédicteurs peut consulter le tour d'horizon très complet contenu dans (Favier et Dubois, 1990). Quelques caractéristiques importantes du GPC seront présentées dans Remarque 2.6; des détails pratiques supplémentaires peuvent être consultés dans (Piguet, 1991) et (Schneider, 1992).

Remarque 2.6

- Le système réglé par un GPC est non causal car il possède $(N1+degA)$ zéros à l'origine. Comme on a un prédicteur, la consigne est avancée.
- Configuration pôles/zéros :
 - $(N1+degA)$ zéros à l'origine
 - $(N2-N1+degB)$ zéros en dehors de l'origine
 - $(degA-degB+d)$ pôles hors de l'origine.
- Le GPC ne simplifie pas les zéros du procédé. Donc, si ce dernier n'est pas à déphasage minimal, le système bouclé avec un GPC ne le sera pas non plus.

2.3.2 Etude des paramètres de synthèse du GPC

Il n'existe pas de méthode rigoureuse pour la détermination du quadruplet $\{N1 ; N2 ; NU ; \lambda\}$. Le concepteur est sensé maîtriser toutes les facettes de la synthèse et ne peut s'appuyer que sur le "bon sens". On présente maintenant quelques résultats de réflexion personnelle sous-tendus par des interprétations d'équations-clés ou des démonstrations originales. Ces développements permettent un choix plus rigoureux du quadruplet $\{N1, N2, NU, \lambda\}$.

Résultat 2.1 : (Nécessité d'utiliser λ lorsque $NU > N2-N1+1$) La matrice G n'est pas carrée en général. On sait que $\text{rang}\{G^TG\} = \text{rang}\{G\}$
Si $NU > N2-N1+1$

alors G^TG n'est pas de rang plein donc non inversible. Il faut, dans ce cas, choisir $\lambda \neq 0$. ♦♦♦

Résultat 2.2 : (Effet de filtrage passe-haut de NU) De l'équation (2.39), on peut exprimer le vecteur de gain à l'aide de la fonction de transfert suivante :

$$K(z) = \frac{G(1/z)\Xi_{N1,N2}}{G(z)G(1/z)\Xi_{NU,NU} + 1}$$

où

- $G(z)$: matrice construite à l'aide de la réponse indicielle du procédé
 $G(z)G(1/z)$: auto-corrélation de la réponse indicielle
 $\Xi_{N1,N2}$: fenêtre rectangulaire de $N1$ à $N2$
 $\Xi_{NU,NU}$: fenêtre rectangulaire de $-NU$ à NU

$G(z)$ est en général un filtre passe-bas car la plupart des systèmes physiques le sont. $G(z)G(1/z)$ est également un filtre passe-bas, mais comme ce terme se trouve au dénominateur, il devient un passe-haut d'ordre $2(NU-1)$. Le régulateur agit comme une compensation qui aboutit à un système global passe-tout (jusqu'à une certaine fréquence) pour autant que $NU > 1$. En pratique, on observe bien ce comportement du GPC.

◆◆◆

Résultat 2.3 : (Régulateur à variance minimale généralisée - GMV) Si $N2 = N1$ et $NU = 1$ alors on obtient le GMV qui correspond à la fonction coût :

$$\mathcal{J} = [\hat{e}(t + N1)]^2 + \lambda[\Delta\hat{u}(t + N1 - 1)]^2$$

Pour le réglage GMV, on sait que le procédé doit être stable et à déphasage minimal. Dans le cas contraire, le système bouclé pourrait être instable. ◆◆◆

Résultat 2.4 : (Influence de $NU \rightarrow \infty$) (Clarke et Mohtadi, 1989) ont démontré qu'il est théoriquement possible de stabiliser n'importe quel système à l'aide d'un GPC si on augmente l'horizon de commande à l'infini. ◆◆◆

Proposition 2.1 : (Influence de λ sur l'erreur quadratique) Pour un procédé parfaitement caractérisé, l'erreur quadratique du GPC est une fonction croissante monotone de λ . Sa valeur est nulle pour $\lambda = 0$ et tend asymptotiquement vers la (consigne)² lorsque λ tend vers l'infini. ◆◆◆

Démonstration :

Admettons que G soit une matrice carrée i.e. $N2 - N1 + 1 = NU$.

Nous avons de (2.38c) et (2.39),

$$\Delta\hat{u}_{opt} = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (w - p)$$

ou encore

$$G^T G \Delta\hat{u}_{opt} + \lambda \Delta\hat{u}_{opt} = G^T (w - p)$$

En combinant avec l'équation de prédiction de la sortie

$$\hat{y} = G \Delta\hat{u}_{opt} + p$$

on a

$$G^T (\hat{y} - p) + \lambda \Delta\hat{u}_{opt} = G^T (w - p)$$

$$\Rightarrow \Delta\hat{u}_{opt} = \frac{1}{\lambda} G^T (w - \hat{y}) = \frac{1}{\lambda} G^T \hat{e}$$

On aboutit aussi à l'équation d'erreur :

$$\mathbf{G}^T \hat{\mathbf{e}} = \lambda \Delta \hat{\mathbf{u}}_{opt}$$

D'où l'expression de l'erreur quadratique estimée

$$\hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}} = \lambda^2 (\mathbf{w} - \mathbf{p})^T \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-T} (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T (\mathbf{w} - \mathbf{p}) \quad (2.42a)$$

1er cas : Si $\lambda = 0$ et $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ inversible
Alors, l'estimée de l'erreur quadratique est nulle.

2ème cas : Si λ est "petit"
l'équation (2.42a) devient

$$\hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}} = \lambda^2 (\mathbf{w} - \mathbf{p})^T \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-T} (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T (\mathbf{w} - \mathbf{p}) \quad (2.42b)$$

Donc, l'erreur quadratique augmente avec le carré de λ .

3ème cas : Si λ tend vers l'infini
l'erreur quadratique devient

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}} &= \lambda^2 (\mathbf{w} - \mathbf{p})^T \mathbf{G} \frac{1}{\lambda} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-T} \frac{1}{\lambda} \mathbf{G}^T (\mathbf{w} - \mathbf{p}) \\ &= (\mathbf{w} - \mathbf{p})^T (\mathbf{w} - \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (2.42c)$$

Quand $\lambda \rightarrow \infty$, la commande, la sortie ainsi que p tendent vers zéro. L'erreur quadratique devient

$$\hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{w}^T \mathbf{w}$$

Ce qui, de façon inattendue, signifie que l'erreur de réglage tend vers la consigne quand λ augmente.

...

Corollaire 2.1 : (Statisme du GPC) Bien que le GPC contienne intrinsèquement un intégrateur, son statisme n'est pas nul dès qu'on choisit $\lambda \neq 0$.

Ce résultat découle directement de la proposition ci-dessus.

Nous montrerons ultérieurement que ce statisme est tellement faible qu'il n'est pas significatif.

Proposition 2.2 : (Dilemme entre l'horizon de commande et celui de coût) λ doit être inférieur à la plus petite valeur propre de $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$. Le choix qui minimise l'erreur de réglage correspond à des horizons de coût et de commande identiques.

◆ ◆ ◆

Démonstration :

Si \mathbf{G} est carrée, on a l'identité

$$\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-T} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1}$$

on peut transformer l'équation (2.42a)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}} &= \lambda^2 (\mathbf{w} - \mathbf{p})^T [\mathbf{G}^{-T} (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}) \mathbf{G}^T \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}) \mathbf{G}^{-1}]^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{p}) \\ &= \lambda^2 (\mathbf{w} - \mathbf{p})^T [(\mathbf{G} \mathbf{G}^T + \lambda \mathbf{I}) (\mathbf{G} \mathbf{G}^T + \lambda \mathbf{I})]^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{p}) \\ &= \lambda^2 (\mathbf{w} - \mathbf{p})^T [(\mathbf{G} \mathbf{G}^T + \lambda \mathbf{I})]^{-2} (\mathbf{w} - \mathbf{p}) \end{aligned}$$

Après une décomposition modale (on note les valeurs propres par μ , ou la matrice \mathbf{M})

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{P}$$

l'erreur a pour expression

$$\hat{e}^T \hat{e} = (w - p)^T P^2 \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2}{(\mu_1 + \lambda)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2}{(\mu_2 + \lambda)^2} & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{(\mu_{N2-NI+1} + \lambda)^2} \end{pmatrix} P^{-2} (w - p) \quad (2.42d)$$

Les éléments non nuls de cette matrice diagonale (*i.e.* de l'erreur) sont faibles si

$$\lambda \ll \min\{\mu_i\}$$

On en déduit que si on prend un horizon de commande plus grand que celui de coût alors $G^T G$ n'est pas inversible, auquel cas l'utilisation de λ est nécessaire et l'erreur ne sera pas nulle comme le montre l'équation (2.42d). Par contre si on choisit un horizon de commande plus petit que l'horizon de coût, l'erreur quadratique va également augmenter car la consigne sera d'autant plus difficile à poursuivre. La limite revient à choisir $NU = N2 - NI + 1$; qui d'une part correspond à une matrice G carrée et d'autre part à $G^T G$ inversible.

...

Ainsi, le régulateur LQ se trouve être un bon compromis. Peterka (1984) a établi que l'équivalent LQ du GPC correspond au triplet $[NI=1; N2=NU=degA; \lambda I=Q]$.

Résultat 2.5 (Effet de filtrage passe-bas d'un λ petit) A partir de l'équation

$$\Delta \hat{u}_{opt} = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (w - p)$$

λ est comme une pondération inverse de cette expression *i.e.* $\Delta \hat{u}_{opt} = \Delta \hat{u}_{opt}(\lambda^{-1})$.

Si $\lambda = 0$ et en admettant que G est carrée, cette expression devient

$$\begin{aligned} \Delta \hat{u}_{opt} &= G^{-1} G^T G^T (w - p) \\ &= G^{-1} (w - p) \end{aligned}$$

Si on devait tenir compte grossièrement de l'effet d'un $\lambda \neq 0$, on a

$$\Delta \hat{u}_{opt} \approx \frac{1}{\lambda} G^{-1} (w - p) \quad (2.43)$$

Une atténuation de l'incrément de commande correspond bien à un filtrage passe-bas. En pratique, on résout le problème de dépassement de la réponse du système en augmentant la valeur de λ .

◆◆◆

Résultat 2.6 (Valeur limite de la fonction de transfert pour un λ grand) Pour une grande valeur de λ , la matrice de gain devient

$$\begin{aligned} K &= (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{G^T G}{\lambda} + I \right)^{-1} G^T \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} G^T \end{aligned}$$

Et la première ligne de cette matrice correspond à la fonction de transfert

$$K(z) = G\left(\frac{1}{z}\right)$$

En substituant cette équation dans (2.41), on en déduit la **fonction de transfert limite** du GPC

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{Y(z)}{W(z)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{z-1} G\left(\frac{1}{z}\right) z^{-d} \frac{z^{\deg A} B(z)}{z^{\deg B} A(z)} \quad (2.44)$$

On peut constater en comparant (2.44) et (2.41) que pour $\lambda \rightarrow \infty$

- a) $(\deg B + d - 1)$ pôles se dirigent vers l'origine
- b) $(\deg A)$ pôles se dirigent vers les pôles du procédé à régler
- c) un pôle se dirige vers 1 (intégrateur)
- d) $(N2 - N1)$ zéros se dirigent vers les zéros de $G(1/z)$. ◆◆◆

Choix des paramètres du GPC :

Faisant suite aux résultats et propositions que nous venons de présenter, nous donnons des indications pertinentes pour le choix des paramètres de synthèse du GPC.

1. Choisir $N1 \geq d+1$

Le contraire serait inutile car la commande présente (instant t) n'influencera la sortie qu'après l'instant $t+d$

2. Prendre $N2 \geq N1$

C'est la définition même de l'horizon de coût. D'ailleurs, plus l'horizon augmente, mieux le GPC se comporte pour des procédés instables. Cependant, en présence de bruit (à fréquence élevée), une prédiction trop "futuriste" est gênante. Dans ce cas là, la dynamique du bruit serait considérée comme une dynamique "utile". Si on identifie la caractéristique fréquentielle du procédé comme étant celle d'un filtre passe-bas idéal, la transformée inverse de la caractéristique est une fonction *sinc*. Cette fonction, qui est paire, est formée d'un lobe principal centré à l'origine et de lobes secondaires de plus en plus petits à mesure que l'on s'éloigne de l'origine. Il est indiqué de faire le choix suivant :

- Système bruité : (ne considérer que le lobe principal)

$$N2 = N1 + \text{Entier}\left\{\frac{f_e}{\beta}\right\} \quad (2.45a)$$

où $\text{Entier}\left\{\frac{f_e}{\beta}\right\}$ est le nombre entier le plus proche du rapport

f_e la fréquence d'échantillonnage

et β la fréquence limite de la bande passante

- Système non bruité : (on retient le lobe principal et le premier lobe secondaire)

$$N2 = N1 + \text{Entier}\left\{\frac{2f_e}{\beta}\right\} \quad (2.45b)$$

On peut conclure ce paragraphe en remarquant qu'il n'est pas toujours possible d'étendre l'horizon de coût comme le permet la théorie.

3. Fixer $N1 \geq NU$

Le choix contraire posera des problèmes pour le calcul de la matrice G car une partie de la réponse indicielle aura des indices négatifs.

4. Choix de NU

La synthèse du GPC passe par l'inversion d'une matrice $(NU \times NU)$. Un choix naturel serait de prendre NU égal à l'ordre du système. Par expérience, un horizon de commande de 2 ou 3 donne de bons résultats pour la plupart des systèmes.

5. Prendre $N2 - N1 + 1 = NU$

Ce choix est suggéré par la Proposition 2.2. L'idéal théorique (mais irréaliste) serait que les deux horizons tendent vers l'infini et qu'il n'y ait pas de bruit.

6. Choix de λ

D'après la même Proposition 2.2, il faudrait prendre la plus petite valeur apte à assurer l'inversion de la matrice G . Mais le paramètre λ permet également de réduire un éventuel dépassement (cf. Résultat 2.5).

2.3.3 Exemple pratique de synthèse d'un GPC

Le GPC a été développé pour les systèmes discrets. Nous allons illustrer une démarche type de synthèse basée sur le système suivant.

Procédé :

Une fonction de transfert à déphasage non minimal et comportant deux pôles complexes

$$\frac{B(z)}{A(z)} = z^{-s} \frac{0.1z + 0.2}{z^2 - 1.7z + 0.9}$$

Ordre du système : $\deg A = 2$

Paramètres de synthèse :

D'une manière intuitive, $N1$ doit être plus grand que le retard pur d et $N2$ lui est naturellement supérieur. Il n'est pas possible qu'un système oscillant soit commandé avec une stratégie *dead beat*; par conséquent NU doit être supérieur à 1. Enfin, λ doit être "petit" pour ne pas introduire un statisme inacceptable. Suite à ces différentes remarques, on adopte la combinaison de valeurs suivante :

$$N1 = 7; N2 = 10; NU = 3; \lambda = 0.01$$

Démarches de synthèse :

On emprunte la démarche classique suivant les équations proposées par Clarke & Mohtadi (1989).

a) On a besoin de 10 échantillons de la réponse indicielle

$$\mathbf{g} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.47 \ 1.009 \ 1.5923 \ 2.0988]^T$$

avec $\dim \mathbf{g} \geq N2$ (2.46)

b) A l'aide de \mathbf{g} , on forme les matrices \mathbf{G} et \mathbf{K}

avec $\dim \mathbf{G} = (N2 - N1 + 1) \times NU$ et $\dim \mathbf{K} = NU \times (N2 - N1 + 1)$ (2.47)

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{N1} & g_{N1-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{N2} & g_{N2-1} & \cdots & g_{N2-NU+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4700 & 0.1000 & 0.0 \\ 1.0090 & 0.4700 & 0.1000 \\ 1.5923 & 1.0090 & 0.4700 \\ 2.0988 & 1.5923 & 1.0090 \end{pmatrix}$$

Le régulateur utilisé est la première ligne de la matrice $\mathbf{K} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T$. Après calcul, on trouve

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1.591 \\ 0.540 \\ -0.580 \\ -0.127 \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ est Hermitienne mais pas Toeplitz. On a besoin de l'inverser, ce qui pourrait handicaper la résolution d'un problème de grande dimension.

Nombre d'opérations pour l'inversion: $O\left(\frac{NU^3}{3}\right)$

c) Les matrices Φ et Ψ sont construites d'après les procédures présentées dans (Clarke & Mohtadi, 1989). La matrice de prédiction complète (i.e. construite sur un horizon de prédiction $N2$) Φ_c est générée à l'aide des coefficients du dénominateur du procédé. Pour former Φ , on ne garde que les lignes entre $N1$ et $N2$.

$$\Phi_c = \begin{pmatrix} 1.7000 & -0.9000 \\ 1.9900 & -1.5300 \\ 1.8530 & -1.7910 \\ 1.3591 & -1.6677 \\ 0.6428 & -1.2232 \\ -0.1305 & -0.5785 \\ -0.8003 & 0.1174 \\ -1.2431 & 0.7203 \\ -1.3930 & 1.1188 \\ -1.2493 & 1.2537 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} -0.8003 & 0.1174 \\ -1.2431 & 0.7203 \\ -1.3930 & 1.1188 \\ -1.2493 & 1.2537 \end{pmatrix}$$

On peut obtenir le terme $[\mathbf{k}^T \Phi]$ de l'équation (2.41) :

$$\mathbf{k}^T \Phi = [-1.7049 \ 0.3517]$$

Il en est de même pour la matrice Ψ formée avec les lignes entre $N1$ et $N2$ de Ψ_c .

$$\Psi_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0.2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0.3700 & 0.3400 \\ 0 & 0 & 0.1000 & 0.3700 & 0.5390 & 0.3980 \\ 0 & 0.1000 & 0.3700 & 0.5390 & 0.5833 & 0.3706 \\ 0.1000 & 0.3700 & 0.5390 & 0.5833 & 0.5065 & 0.2718 \\ 0.4700 & 0.5390 & 0.5833 & 0.5065 & 0.3361 & 0.1286 \\ 1.0090 & 0.5833 & 0.5065 & 0.3361 & 0.1155 & -0.0261 \\ 1.5923 & 0.5065 & 0.3361 & 0.1155 & -0.1061 & -0.1601 \\ 2.0988 & 0.3361 & 0.1155 & -0.1061 & -0.2844 & -0.2486 \\ 2.4349 & 0.1155 & -0.1061 & -0.2844 & -0.3879 & -0.2786 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Psi = \begin{pmatrix} 1.0090 & 0.5833 & 0.5065 & 0.3361 & 0.1155 & -0.0261 \\ 1.5923 & 0.5065 & 0.3361 & 0.1155 & -0.1061 & -0.1601 \\ 2.0988 & 0.3361 & 0.1155 & -0.1061 & -0.2844 & -0.2486 \\ 2.4349 & 0.1155 & -0.1061 & -0.2844 & -0.3879 & -0.2786 \end{pmatrix}$$

et le terme $[k^T \Phi]$ de l'équation (2.41) :

$$k^T \Psi = (2.0340 \quad 1.1672 \quad 0.9939 \quad 0.6392 \quad 0.1921 \quad -0.0782)$$

N.B. : Comme,

$$\dim \Phi_c = (N2 - N1 + 1) \times \deg A \quad \text{et} \quad \dim \Psi_c = (N2 - N1 + 1) \times (\deg B + d) \quad (2.48)$$

on constate que la dimension de Ψ peut devenir très grande avec le retard d .

Schéma fonctionnel :

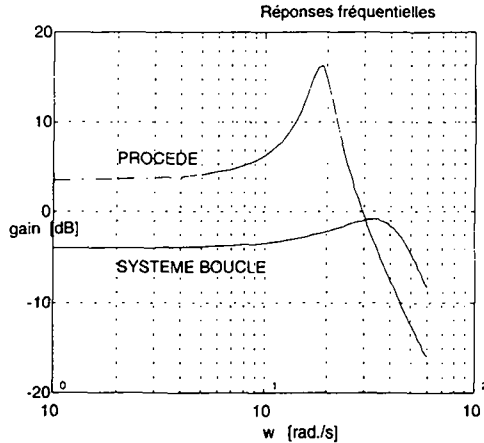
En boucle fermée, le système est caractérisé par :

$$\text{Numérateur : } B_{\text{sf}}(z) = -0.0127 z^4 - 0.0312 z^3 + 0.0424 z^2 + 0.2670 z + 0.3182$$

$$\text{Zéros : } 2.75 ; -1.60 \pm j1.41 ; -2.0$$

$$\text{Dénominateur : } A_{\text{sf}}(z) = z^8 - 0.6660 z^7 + 0.3093 z^6 + 0.0596 z^5$$

$$\text{Pôles : } 0.18 \pm j0.41 ; 0.30 ; -0.0003 \pm j0.0009 ; 0.0008 \pm j0.0005 ; -0.0009$$

Réponses fréquentielles :**Fig. 2.14 :** Comparaison des réponses fréquentielles

On observe une amélioration de la dynamique en boucle fermée, comparée au procédé seul. En effet, sans régulateur, la réponse fréquentielle du système comporte une résonance à la pulsation 18 [rad/s], par contre, le système bouclé tend vers un "passe-tout" jusqu'à $\omega = 40$ [rad/s].

Commentaires 2.1

Nous disposons d'un cadre de simulation qui permet de construire itérativement un régulateur GPC. En supplément d'un module principal de calcul du régulateur, il existe des modules secondaires qui peuvent servir à analyser le système bouclé avec le régulateur obtenu dont

- Visualisation des réponses temporelles du système bouclé
 - pour des valeurs différentes du quadruplet $\{N1, N2, NU, \lambda\}$
 - pour plusieurs sortes de consigne (saut unitaire, rampe, parabole, etc.)
 - pour des retards relativement grands
- Carte des pôles et zéros
- Lieu des pôles du système paramétrisé par λ

2.4 ANALYSE DE SENSIBILITE D'UN REGULATEUR A GAIN ELEVE

PRELIMINAIRES

Nous terminons ce chapitre en reprenant le régulateur à grand gain suggéré au §2.2.2A pour montrer qu'il n'est pas seulement insensible mais vraiment robuste. Nous donnons une démonstration originale (§ 2.4.2) sur la conservation de l'insensibilité due à ce grand gain même si la variation paramétrique n'est pas petite; en outre, la robustesse de la performance sera également démontrée. Ces qualités seront d'autant meilleures que ε est petit. Notre démarche consiste à démontrer la stabilité robuste de notre régulateur pour un degré relatif nul du procédé ($n = m$); puis en raisonnant par récurrence ou montre que cette proposition demeure vraie pour $n=m+1$.

Dans cette démonstration, on retrouve des développements assez des perturbations singulières. Les détails des mises en équation se trouvent dans le livre de Kokotovic *et al.* (1986), ou bien (Naidu, 1988). La dernière référence présente les perturbations singulières de façon plus abordable.

2.4.1 Modélisation d'un système non stationnaire

On définit :

- l'opérateur "dérivation" par : $p = \frac{d}{dt}$
- la j -ième dérivée de x : $x^{(j)} = \frac{d^j}{dt^j} x$
- une variable x à la puissance i : x^i

Le processus incertain sera modélisé par un système non stationnaire.

$$D(p,t)y(t) = N(p,t)u(t) \quad (2.49a)$$

$$\text{où } \begin{cases} N(p,t) = \sum_{i=0}^m b_{m-i}(t)p^i & , \quad b_0 \neq 0 \\ D(p,t) = \sum_{i=0}^n a_{n-i}(t)p^i & , \quad a_0 = 1 \end{cases} \quad (2.49.b)$$

E. W. Kamen (1976) a proposé la *réalisation* suivante pour un tel système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \quad (2.50a)$$

avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_n \\ -1 & \ddots & \vdots & \tilde{a}_{n-1} \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & -1 & \tilde{a}_1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} \tilde{b}_m \\ \vdots \\ \tilde{b}_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C(t) = [0 \dots 0 \quad (-1)^{n-m+1}] \quad (2.50b)$$

Les nouveaux coefficients "tildes" sont obtenus en appliquant à N et D l'opérateur adjoint défini de la manière suivante :

$$\sum_{i=0}^n a_{n-i} p^i \rightarrow \sum_{i=0}^n \tilde{a}_{n-i} p^i = \sum_{i=0}^n a_{n-i} (-p)^i \quad (2.51a)$$

$$\sum_{i=0}^m b_{m-i} p^i \rightarrow \sum_{i=0}^m \tilde{b}_{m-i} p^i = \sum_{i=0}^m b_{m-i} (-p)^i \quad (2.51b)$$

et en fixant arbitrairement les valeurs $\tilde{a}_0 = 1$ et $\tilde{b}_0 = b_0 \neq 0$.

Définition 2.1 La réalisation est exponentiellement stable si

a) $x(t)$ est uniformément bornée

b) pour un $\varepsilon > 0$, $x(t) e^{\varepsilon t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$

◇◇◇

Définition 2.2 Le système est à phase minimale si la réalisation de son numérateur en régime libre $N_u = 0$ est exponentiellement stable. La réalisation du numérateur est exprimée par

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{\tilde{b}_m}{b_0} \\ -1 & \ddots & \vdots & \frac{\tilde{b}_{m-1}}{b_0} \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & -1 & \frac{\tilde{b}_1}{b_0} \end{pmatrix} \xi \quad (2.52)$$

◇◇◇

2.4.2 Modélisation du régulateur à gain élevé

Le schéma fonctionnel de la figure 2.15 -a comporte un élément non linéaire. La transformée de Laplace ne s'applique donc pas. D'autre part, on représente le système incertain par une réalisation non stationnaire fournie par la transformation de Kamen (1976).

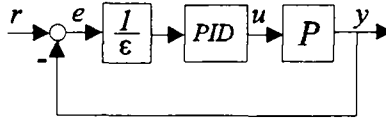


Fig. 2.15-a : Schéma fonctionnel d'un système bouclé avec un régulateur à gain élevé

Les dérivées des signaux qui interviennent dans ce système doivent être finies car le compensateur contient au moins un dérivateur; par conséquent, un préfiltrage de consigne P_m sera utilisé (cf. fig. 2.15-b) en plus du compensateur de boucle $K(s) = \frac{N_I(s)}{\epsilon D_I(s)}$.

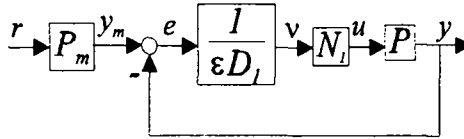


Fig. 2.15-b : Schéma équivalent d'un régulateur à gain élevé

On peut avoir un régulateur robuste et exponentiellement stable basé sur ce schéma dont les équations de base sont :

- Préfiltre : P_m

Il sert à imposer un signal de consigne de référence raisonnable pour la dynamique du système

$$y_m(s) = P_m(s) r(s) \quad (2.53)$$

La sortie y suit la référence y_m au sens de la contrainte suivante :

$$|e(t)| = |y_m(t) - y(t)| < \delta, \quad \forall t \geq t_0 \quad \text{et} \quad \delta \geq 0 \quad (2.54)$$

- Compensateur : K

En nous référant à la figure 2.15-c, on adopte le modèle de régulateur suivant :

$$\begin{cases} u(t) = N_I(p, t) v(t) \\ D_I(p, t) v(t) = \frac{1}{\epsilon} (y_m(t) - y(t)) \end{cases} \quad (2.55)$$

Dans la littérature de perturbation singulière, c'est une "**forme actuateur**", par opposition à la "**forme senseur**". Le régulateur modélisé par $\frac{1}{\epsilon}$ est placé en aval du filtre (N_I, D_I) .

2.4.3 Analyse du régulateur à gain élevé

Par analyse nous entendons la quantification théorique de la stabilité robuste et la performance robuste en fonction de ϵ et des coefficients $A(p)$ et $B(p)$ incertains du procédé.

Nous adoptons les hypothèses suivantes :

H1 : Le modèle du procédé est à phase minimale

H2 : L'ordre n du système est connu ainsi que le degré relatif $(n - m)$.

H3 : Les paramètres incertains du procédé sont bornés et de classe C^n ,
i.e. les n -ièmes dérivées existent.

H4 : Le signal de consigne est borné et lisse (smooth)
i.e. les signaux sont bornés ainsi que leurs dérivées successives.

H4 : Conditions initiales :

$$e(t_0) = e^{(1)}(t_0) = \dots = e^{(n-1)}(t_0) = 0 \quad (2.56)$$

Sous ces conditions, on va montrer qu'il existe un régulateur K à paramètres fixes et un préfiltre P_m qui permettent au système d'être robustement stable; la poursuite est également robuste au sens de (2.54).

Proposition 2.3 (Détermination et analyse du système de réglage) *Pour un procédé incertain (modélisé comme un système linéaire non stationnaire) et un modèle de référence P_m invariant, stable et judicieusement choisi, il existe un régulateur à gain élevé qui satisfait la robustesse de stabilité et de performance au sens de la poursuite d'une trajectoire de référence $|y_m(t) - y(t)| < \delta$. Le régulateur est stable et à phase minimale.*

- le régulateur est modélisé par

$$\begin{cases} u(t) = N_I(p, t)v(t) \\ D_I(p, t)v(t) = \frac{1}{\epsilon}(y_m(t) - y(t)) \end{cases}$$

où $N_I(p)$ et $D_I(p)$ sont stables, moniques et de degré arbitrairement fixé à $(n-m-1)$;

- $\epsilon > 0$ est suffisamment petit et dépendant de δ .

◆◆◆

Eléments de démonstration :

Premier cas : $n = m$

Le régulateur suivant suffit :

$$\frac{u(p)}{e(p)} = K(p) = \frac{1}{\epsilon} \quad (2.57)$$

Dans ce cas l'équation du système en boucle fermée est

$$(\epsilon D + N)y = N y_m \quad (2.58a)$$

et l'équation d'erreur

$$(\varepsilon D + N) e = \varepsilon D y_m \quad (2.58b)$$

On peut démontrer, en se basant sur l'hypothèse H1, que ce système est exponentiellement stable pour un ε suffisamment petit. En outre, si y_m est lisse et les conditions initiales de l'hypothèse H4 vérifiées, on peut toujours trouver

$$\varepsilon^* > 0 \mid |e(t)| < \delta \text{ pour } t \geq t_0 \text{ et } \varepsilon \in (0, \varepsilon^*] \quad (2.59)$$

Deuxième cas : $n - m = 1$

Le régulateur a la même forme que précédemment :

$$K = \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.60)$$

En appliquant (2.50), on obtient la réalisation du système.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - \frac{1}{\varepsilon} By + \frac{1}{\varepsilon} B y_m \\ y = Cx \\ y_m = P_m r \end{cases} \quad (2.61)$$

Avant de procéder à la décomposition en sous-systèmes rapides et lents, on applique à (2.61) le changement de variables suivant :

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = Lx \quad (2.62a)$$

où

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\tilde{b}_{n-1}}{b_0} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -\frac{\tilde{b}_{n-2}}{b_0} \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & -\frac{\tilde{b}_1}{b_0} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.62b)$$

En appliquant la transformation (2.62) à l'équation d'état (2.61), on a :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_{11}z + a_{12}y, & z(t_0) = 0 \\ \varepsilon \dot{y} = a_{21}z + a_{22}y + b_0 y_m, & y(t_0) = 0 \end{cases} \quad (2.62c)$$

où

$$a_{21} = [0 \dots 1]$$

$$a_{22} = \varepsilon \left(\tilde{a}_1 - \frac{\tilde{b}_1}{b_0} \right) \cdot b_0$$

Faisons apparaître l'erreur :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_{11}z + a_{12}y_m - a_{12}e & , \quad z(t_0) = 0 \\ \varepsilon \dot{e} = a_{21}z + a_{22}e + \varepsilon \dot{y}_m - \varepsilon \left(\tilde{a}_1 - \frac{\tilde{b}_1}{b_0} \right) y_m & , \quad e(t_0) = 0 \end{cases} \quad (2.62d)$$

Pour avoir une décomposition lente/rapide, on utilise le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} z \\ e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z_s \\ e_f \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z = z_s + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ e = a_{22}^{-1} a_{21} z_s + e_f \left(\frac{t-t_0}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases} \quad (2.63a)$$

On obtient les sous-systèmes lents et rapides en appliquant les techniques de décomposition de la section 2.1.3.

$$\begin{cases} \dot{z}_s = A_{11}z_s + a_{12}y_m & , \quad z_s(t_0) = 0 \\ \varepsilon \dot{e}_f = - \left[b_0 - \varepsilon \left(\tilde{a}_1 - \frac{\tilde{b}_1}{b_0} \right) \right] e_f + \varepsilon \dot{y}_m - \varepsilon \left(\tilde{a}_1 - \frac{\tilde{b}_1}{b_0} \right) y_m & , \quad e(t_0) \end{cases} \quad (2.63b)$$

Condition de stabilité robuste:

La deuxième ligne de (2.63) est une équation d'erreur. Sa valeur propre doit être négative pour que le système soit stable :

$$i.e. \quad b_0 > \varepsilon \left(\tilde{a}_1 - \frac{\tilde{b}_1}{b_0} \right) \quad (2.64)$$

Interprétation de la robustesse :

Si les coefficients \tilde{a}_1 , b_0 et \tilde{b}_1 varient, la stabilité sera toujours assurée du moment que l'inégalité (2.64) reste vérifiée.

Pour démontrer la robustesse de la performance, nous avons besoin du lemme de Gronwall dont voici un bref rappel.

Lemme 2.1 (de Gronwall) Soient une fonction continue $\mathcal{A}(t) : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, et des constantes $\mathcal{B}, C \geq 0$.

Si $\mathcal{A}(t) \leq \mathcal{B} + \int_{t_0}^t C \mathcal{A}(t) dt, \forall t > 0$

alors $\mathcal{A}(t) \leq \mathcal{B} \exp(Ct)$ ♦ ♦ ♦

Démonstration : voir (Vidyasagar, 1993). Ce lemme permet de convertir une borne sous forme intégrale en une expression exponentielle. ...

Condition de performance robuste :

on peut poser

$$\mathcal{A}(t) = \int_{t_0}^t \dot{e}_f(\tau) d\tau = e_f(t)$$

$$\mathcal{B} = \dot{y}_m - \left(\tilde{a}_l - \frac{\tilde{b}_l}{b_0} \right) y_m$$

$$C = - \left[b_0 - \varepsilon \left(\tilde{a}_l - \frac{\tilde{b}_l}{b_0} \right) \right]$$

$$t = \frac{t - \tau}{\varepsilon}$$

En appliquant le lemme de Gronwall à l'équation (2.63), on a

$$e_f(t) \leq \int_{t_0}^t \exp \left(- \frac{\left[b_0 - \varepsilon \left(\tilde{a}_l - \frac{\tilde{b}_l}{b_0} \right) \right] (t - \tau)}{\varepsilon} \right) \left(\dot{y}_m - \left[\tilde{a}_l - \frac{\tilde{b}_l}{b_0} \right] y_m \right) d\tau$$

Définissons maintenant μ , une borne de \mathcal{B}

$$\mu = \max \left\{ \left| \dot{y}_m - \left(\tilde{a}_l - \frac{\tilde{b}_l}{b_0} \right) y_m \right| \right\} < \infty \quad (2.65)$$

et

$$b_0^* \leq b_0 - \varepsilon \left(\tilde{a}_l - \frac{\tilde{b}_l}{b_0} \right) \quad (2.66)$$

Les hypothèses H3 sur les bornes des paramètres et H4 sur le signal de consigne permettent d'affirmer que :

$$|e_f(t)| \leq \mu \int_{t_0}^t \exp \left(- \frac{\left[b_0 - \varepsilon \left(\tilde{a}_f - \frac{\tilde{b}_f}{b_0} \right) \right] (t - \tau)}{\varepsilon} \right) d\tau \leq \mu \frac{\varepsilon}{b_0} \quad (2.67)$$

Pour le système global avec $e(t)$, on se base sur le changement de variable (2.63a) et l'hypothèse H4 qui impose que z_s est bornée pour affirmer que :

$$|e(t)| < \mu \frac{\varepsilon}{b_0} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

On applique un résultat connu en perturbation singulière c.f. (Kokotovic *et al.*, 1986):

$$\forall \delta, \exists \varepsilon^* > 0 \text{ tel que si } \varepsilon \in (0, \varepsilon^*] \text{ alors } \frac{\mu}{b_0} + \mathcal{O}(\varepsilon) < \delta \quad (2.68)$$

(2.67) et (2.68) signifient que le régulateur assure une performance en poursuite

$i.e. \quad e(t) < \mu \frac{\varepsilon}{b_0} + \mathcal{O}(\varepsilon) < \delta \quad (2.69)$
--

Cette performance est robuste car les équations (2.65) et (2.66) s'expriment explicitement en fonction des variations des coefficients \tilde{a}_f , \tilde{b}_0 et \tilde{b}_f .

Troisième cas : $n - m > 1$

Pour les deux premier cas, le compensateur est égal à l'unité, et n'a donc pas de dynamique. Pour le troisième cas, on doit modéliser le régulateur en utilisant une variable intermédiaire $v(t)$ qui permet, grâce au gain élevé $\frac{1}{\varepsilon}$, un découplage entre l'erreur et la commande.

L'équivalent de la réalisation (2.61), à partir de l'équation (2.55), nous donne une **réalisation du régulateur**

$$\begin{cases} \varepsilon_f \dot{x}_v = -A_v x_v + \frac{1}{\varepsilon} B_v (y_m - y) \\ v = C_v x_v \end{cases} \quad (2.70)$$

On a l'équation du système bouclé avec le régulateur

$$\begin{cases} D(p, t) y(t) = N(p, t) N_f(p, t) v(t) \\ D_f(p, t) v(t) = \frac{1}{\varepsilon} (y_m(t) - y(t)) \end{cases} \quad (2.71)$$

Dans ce cas, on obtient la **réalisation du système bouclé** en combinant (2.61) et (2.70)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bv \\ y = Cx \\ \varepsilon_f \dot{x}_v = -A_v x_v + \frac{1}{\varepsilon} B_v (y_m - y) \\ v = C_v x_v \end{cases} \quad (2.72)$$

La décomposition en parties lente et rapide donne :

$$\begin{cases} \dot{x}_s = Ax_s - \frac{1}{\varepsilon} By + \frac{1}{\varepsilon} B y_m \\ \varepsilon_f \dot{x}_f = -A_v x_f + \frac{1}{\varepsilon} B_v y_m \end{cases} \quad (2.73)$$

On constate que la partie lente de (2.73) est exactement la première équation du système (2.61) que nous avons discuté dans le deuxième cas. On peut y appliquer les résultats sur la stabilité et la performance robustes :

a) le sous-système lent de (2.73) est exponentiellement stable;

b) $|C x_s - y_m| < \delta, \forall t \geq t_0$ et $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$.

D'autre part, comme nous avons choisi par hypothèse un régulateur stable et à phase minimale, on peut appliquer le théorème 2.1 du Chapitre 3 de Kokotovic *et al.* (1986) pour la partie rapide de (2.73) :

si $\exists \varepsilon^*_f > 0 \mid \varepsilon_f \in (0, \varepsilon^*_f]$, alors le système (rapide) est stable et $\|e(t)\| < \delta$.

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.4.

...

2.4.4 Illustration pratique du compensateur relais-PID

A. Commande d'un servomécanisme

Nous allons présenter un système incertain commandé tour à tour par un PID et un relais-PID. Il s'agit du modèle d'un servomécanisme de laboratoire. Le modèle nominal est donné ci-dessous pour une période d'échantillonnage de $h = 20[ms]$:

$$P_0 = \frac{0.1523 \cdot 10^{-3} z + 0.1508 \cdot 10^{-3}}{z^2 - 1.9710 z + 0.9710} \quad (2.74)$$

Afin de simuler un changement drastique du procédé, un processus instable est considéré; le pôle $p_{01} = +0.9711$ se déplace à $\bar{p}_1 = 1.0186$:

$$\bar{P} = \frac{0.1523 \cdot 10^{-3} z + 0.1508 \cdot 10^{-3}}{z^2 - 2.0186 z + 1.0186} \quad (2.75)$$

Le régulateur PID choisi pour le système nominal P_0 a pour équation :

$$K_{PID} = \frac{105.03z^2 - 204.9z + 100}{z^2 - z} \quad (2.76)$$

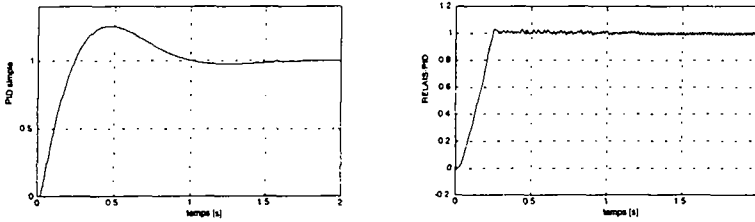


Fig. 2.16 : Réponses en boucle fermée du système nominal

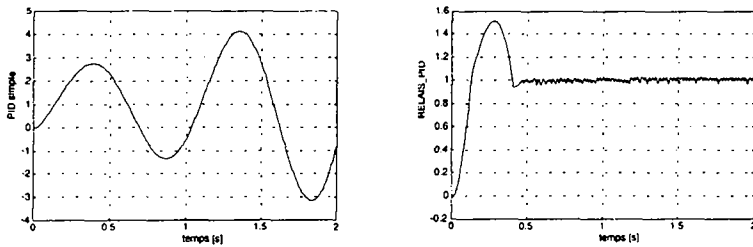


Fig. 2.17 : Réponses en boucle fermée du système perturbé

Le PID procure un bon comportement du système nominal (fig. 2.16) mais n'est pas robuste par rapport au changement de processus (figure 2.17). Par contre, l'adjonction d'un relais permet de rétablir la situation comme le montre la figure 2.17. Les trois courbes de la figure 2.18 confirment les prévisions théoriques des équations (2.64) pour la robustesse en stabilité et (2.68) pour la prescription de la robustesse des performances.

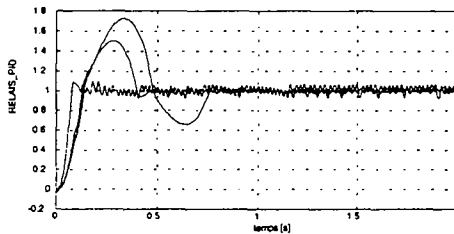


Fig. 2.18 : Performance en boucle fermée du système perturbé
(amplitudes respectives du relais : +/- 0.7[V] ; +/- 1.0[V] ; +/- 2[V])

- a) La meilleure réponse que nous obtenons correspond à l'utilisation de la plus grande amplitude du relais (2 [V] équivalent au ϵ plus petit). Dans ce cas, la réponse ne présente pas de dépassement.
- b) L'amplitude du relais à 1[V] "laisse échapper" un dépassement qui est vite résorbé au bout d'une demi-période.
- c) Quand le relais travaille avec la plus faible amplitude (0.7[V]), la réponse du système en boucle fermée oscille pendant une période complète. Cette oscillation ne se serait pas amortie aussi rapidement si le PID seul se chargeait du réglage.

L'auto-oscillation de faible amplitude en régime permanent peut être atténuée par une contre réaction tachymétrique bien dosée.

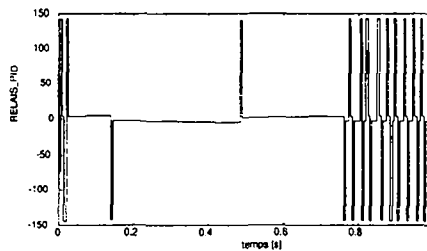


Fig. 2.19 : Allure de la commande générée par un relais-PID

Enfin, on peut remarquer (Fig. 2.19) que la commande délivrée par un régulateur relais-PID est très différente de celle d'un régulateur bang-bang. Les valeurs maximales de 150 sur la figure correspondent à 150 [V] effectifs.

B. Implantation temps réel

Nous avons implanté cette méthode de réglage sur un servomécanisme de laboratoire. La partie expérimentale externe est modélisé par

$$P_{ext} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad (2.77)$$

Protocole d'essai :

La partie évolutive du système incertain est simulée numériquement par le processeur dans les deux cas :

- a) système nominal stable

$$P' = \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad (2.78)$$

b) système perturbé instable

$$\tilde{P} = \frac{1 + \tilde{b}_1 z^{-1}}{1 + \tilde{a}_1 z^{-1}} \quad (2.79)$$

Le procédé mixte devient :

c) système nominal

$$P_{ext} P' = P_0 = \frac{0.1523 \cdot 10^{-3} z + 0.1508 \cdot 10^{-3}}{z^2 - 1.9710 z + 0.9710} \quad (2.80)$$

d) système perturbé

$$P_{ext} \tilde{P} = \bar{P} = \frac{0.1549 \cdot 10^{-3} z + 0.1559 \cdot 10^{-3}}{z^2 - 2.0186 z + 1.0186} \quad (2.81)$$

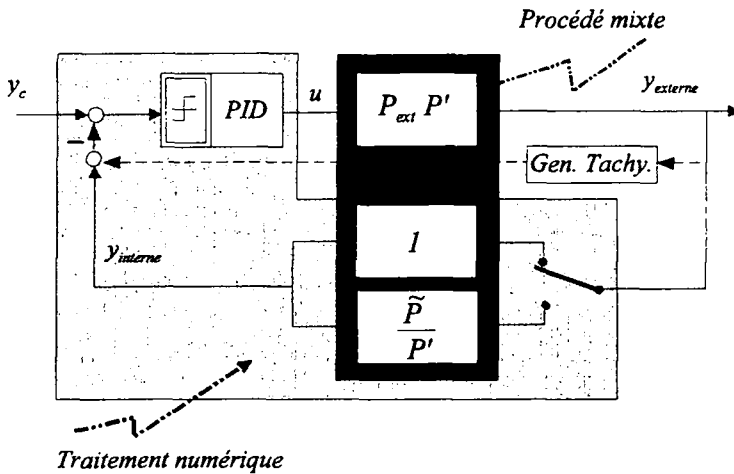


Fig. 2.20 : Principe d'implantation du système incertain

Commentaires 2.2

- Dans ce cas pratique, l'efficacité du réglage dépend de l'amplitude du relais qui elle-même est limitée par l'actionneur (amplificateur de puissance qui commande le moteur). Dans ce cas précis, la tension maximale est de 40[V]. La valeur limite du pôle instable que le relais peut « rattraper » est $p=1.0183$.
- Le « petit » cycle limite observé sur la figure 2.18 a été corrigé par une contre réaction tachymétrique ajustée directement sur le stand.

REFERENCES

- Bourlès H. & Aïoun F. (1993), "Approche $H-\infty$ et μ -synthèse", recueil Ecole d'été d'automatique de Grenoble.
- Boyd S. P. & Barrat C. H. (1991), "Linear Control Design", Prentice-Hall.
- Clarke D. W. & Mohtadi C. (1989), "Properties of GPC", Automatica, vol. 25, n°6, pp. 859-875.
- Favier G. & Dubois D. (1990), « A Review of k -Step-ahead Predictors », Automatica vol.26 n°1, pp. 75-84.
- Frank P. (1978), "Introduction to Sensitivity Theory", Academic Press.
- Kamen E. W. (1976), "Representation and Realization of Operational Differential Equations with Time-varying Coefficients", J. of the Franklin Institute, vol. 301, n°6, pp. 559-571.
- Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J. (1986), "Singular Perturbation Method in Control: Analysis and Design", Academic Press.
- Kokotovic P. V. & Rutman (1965), "Sensitivity of Automatic Control Systems - Survey", Avtomatika i telemekhanika, vol. 26, n°4, pp. 730-750.
- Morari M. & Zafiriou E. (1989), "Robust Process Control", Prentice-Hall.
- Naidu D. S. (1988), "Singular Perturbation Methodology in Control Systems", IEE Control Engineering Series 34, Peter Peregrinus Ltd.
- Narendra K. S. & Parthasarathy K. (1990), "Identification and Control of Dynamical Systems Using Neural Networks", IEEE - Trans. on Neural Network, vol. 1, n°1, pp. 4-27.
- Ngo N. T. (1971), "Sensitivity of Automatic Control Systems - Review", Avtomatika i telemekhanika, n°5, pp. 58-82, (traduction).
- Perkins W. R., P. V. Kokotovic, Bourret T. & Schiano J. L. (1991), "Sensitivity Function Methods in Control System Education", preprints of IFAC Conf. on Advances in Control Education, Boston.
- Peterka V. (1984), "Predictor-based Self-tuning Control", Automatica, vol. 20, pp. 39-50.
- Piguet Y. (1990), "Etude du Réglage Prédictif", travail de diplôme IA-EPFL.
- Schneider Th. (1991), "Réglage Prédictif Généralisé - GPC", travail de diplôme IA-EPFL.
- Vidyasagar M. (1993), "Nonlinear Systems Analysis", Prentice-Hall.

Vilenius M. J. (1983), "*The application of Sensitivity Analysis to Electrohydraulic Position Control Servos*", Trans. of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 105, pp. 77-82.

Weinmann A. (1991), "*Uncertain Models and Robust Control*", Springer-Verlag.

ROBUSTIFICATION DU REGULATEUR RST

INTRODUCTION

But et originalité de notre démarche : La plupart des méthodes du réglage robuste introduisent des approches radicalement nouvelles comme les méthodes d'interpolation (Kimura, 1984) ou l'optimisation H_2/H_∞ (Doyle *et al.*, 1989). Par contre, notre approche se propose de démarrer avec un régulateur polynomial à deux degrés de liberté de type RST. Par rapport à ce régulateur nominal, nous rajoutons des procédures de robustification basées sur une connaissance de l'incertitude paramétrique du procédé ou simplement sur un critère de robustesse lié aux fonctions de sensibilité.

Composantes et matières traitées : Le procédé est modélisé par une fonction de transfert :

$$P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = P_0(z) + \Delta P_a(z) = \frac{B_0(z)}{A_0(z)} + \Delta P_a(z) \quad (3.1)$$

Le régulateur est constitué par trois composantes (cf. figure 3.4) : $\frac{1}{R(z)}$ qui pondère l'erreur de réglage, $S(z)$ qui filtre la contre-réaction et $T(z)$ peut être interprété comme un filtrage de la consigne. La méthode classique de synthèse du régulateur RST (Tuncelli, 1992) se fait par placement des pôles du système bouclé. Ceux-ci sont représentés par un polynôme $A_m(z)$ choisi librement par le concepteur.

Outils et démarches de robustification : Dans un premier temps (Section 3.2), un régulateur à deux degrés de liberté de type RST sera «robustifié» en tenant compte d'une norme qui fixera la qualité du réglage par rapport à la pire des incertitudes tolérables. Cette procédure de test *a priori* utilisera ce qu'on dénomme habituellement par polynôme observateur A_{obs} . Ensuite, nous postulons que la perturbation d'un système asservi possède deux composantes : le bruit de mesure, un signal parasite s'additionnant à la sortie $y(t)$ et l'erreur de modèle, un signal supplémentaire résultant de l'écart $\Delta P_a(z)$ entre le modèle $P_0(z)$ adopté et le système réel. Nous utilisons dans ce cas le terme de *perturbation étendue*. Nous allons nous atteler à l'investigation de cette perturbation étendue pour pouvoir la compenser efficacement. Nous allons proposer une *émulation* de cette perturbation généralisée qui sera incorporée dans la *synthèse robuste* du régulateur. En complément à ce résultat, un compensateur de perturbation étendue $Q(z)$ servira à «robustifier» le régulateur. Ces démarches sont résumées dans le tableau 3.1.

Tab.3.1 : Robustification du régulateur RST

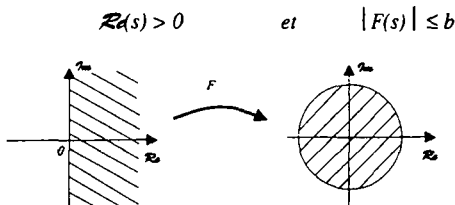
	UTILISATION DE L'INCERTITUDE PARAMETRIQUE	UTILISATION D'UNE EMULATION DE PERTURBATION	SYNTHESE MIXTE $A_{obs} - Q$
CADRE	Incertitude paramétrique	Perturbation étendue	Incertitude paramétrique et perturbation étendue
METHODE	Critère algébrique de robustesse	Emulation et compensation de la perturbation étendue	Synthèse itérative vérifiée par un gabarit de robustesse
RESULTATS	« Augmentation » du régulateur par A_{obs}	RST paramétrisé par Q	RST robuste
CONTENU DU CHAPITRE	§ 3.2.3 Détermination de bornes de robustesse § 3.2.3 Synthèse RST robuste	§ 3.3.2 Structure robuste § 3.3.3 Régulateur Q-RST	Section 3.1 Caractéristiques de robustesse § 3.3.5 Synthèse mixte Q et A_{obs}

3.1 CARACTERISTIQUES DE ROBUSTESSE

PRELIMINAIRES :

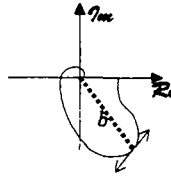
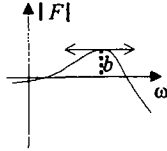
Les précurseurs du réglage robuste ont analysé ce problème dans l'espace de Hardy; cet espace est formé par l'ensemble des fonctions analytiques qui n'ont pas de racines dans \mathbf{R}^+ , et qui sont bornées. Nous allons brièvement introduire ce domaine qui se prête bien à l'analyse et à la synthèse de régulateurs robustes dont les caractéristiques de performance sont spécifiées dans le domaine fréquentiel.

Définition 3.1 (Espace H-infini) On appelle espace H^∞ l'ensemble de toutes les fonctions $F(s) \in \mathbf{C}$ (le corps des nombres complexes) analytiques et bornées dans le demi plan ouvert de droite.



◇◇◇

Définition 3.2 (Norme H^∞) On appelle norme H^∞ la borne b ainsi définie, dénotée $\| \cdot \|_\infty$. D'une manière équivalente : $\|F(s)\|_\infty = \sup_{\Re(s) \geq 0} |F(s)| = \sup_{\omega \in \mathbf{R}} |F(j\omega)|$



◇◇◇

Définition 3.3 (Fonctions de sensibilité) On rappelle les différentes fonctions de sensibilité pour un système constitué d'un procédé $P(s)$ et d'un régulateur $K(s)$; les grandeurs se rapportant au procédé nominal $P_0(s)$ sont indicées par 0.

- Sensibilités

$$S(s) = \frac{1}{1 + K(s)P(s)} \quad ; \quad S_0(s) = \frac{1}{1 + K(s)P_0(s)} \quad (3.2a)$$

- Sensibilités complémentaires

$$\mathcal{T}(s) = \frac{K(s)P(s)}{1 + K(s)P(s)} \quad ; \quad \mathcal{T}_0(s) = \frac{K(s)P_0(s)}{1 + K(s)P_0(s)} \quad (3.2b)$$

◇◇◇

3.1.1 Critères de robustesse

A. Stabilité robuste

L'idée consiste à déterminer l'incertitude maximale $\overline{\Delta_m P(\omega)}$ de manière à ce que le système réglé avec le régulateur synthétisé à l'aide du modèle nominal soit stable.

Théorème 3.1 : (Stabilité robuste) Si

a) un système incertain peut correspondre à tous les procédés P suivants

$$P = \left\{ P(\omega) : \left| \frac{P(\omega) - P_0(\omega)}{P_0(\omega)} \right| \leq \overline{\Delta_m P(\omega)} \right\} \quad (3.3a)$$

b) le nombre de pôles instables est le même pour tous les procédés P

c) il existe un régulateur particulier K qui stabilise le système incertain P

alors pour que le système réglé à l'aide du régulateur fixe K soit robustement stable, il faut satisfaire la condition suffisante

$$\|\mathcal{T}_0(\omega) \overline{\Delta_m P(\omega)}\|_\infty < 1 \quad (3.3b)$$

◆◆◆

Démonstration :

D'après sa définition en (3.3a), l'incertitude forme, le long du lieu de Nyquist $KP_0(\omega)$, un disque décrit par

$$|K(\omega)P(\omega) - K(\omega)P_0(\omega)| \leq |K(\omega)P_0(\omega)| \overline{\Delta_m P(\omega)}$$

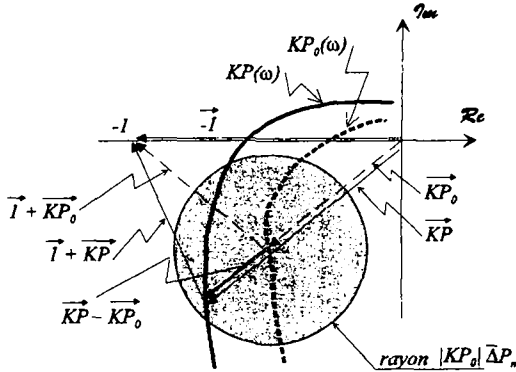


Fig. 3.1 : Représentation graphique de l'incertitude

Pour que le système soit stable, le rayon du disque d'incertitude, dans lequel peut se trouver le système incertain, ne doit pas dépasser la distance de son centre au point -1 , i.e. le lieu de KP passe à droite de -1 .

$$|1 + K(\omega)P_0(\omega)| > |K(\omega)P_0(\omega)| \Delta_m \overline{P}(\omega)$$

En divisant les deux membres par $|1 + KP_0|$, on a

$$1 > \frac{|K(\omega)P_0(\omega)|}{|1 + K(\omega)P_0(\omega)|} \Delta_m \overline{P}(\omega)$$

D'où, dans le pire des cas

$$\|\mathcal{T}_0(\omega) \Delta_m \overline{P}(\omega)\|_\infty < 1$$

...

B. Performance robuste

D'une manière générale, le rejet de perturbation ou la minimisation de l'erreur de poursuite de consigne se traite par la mise en forme de la fonction de sensibilité $\mathcal{S}(\omega)$ à l'aide d'une fonction de pondération $W(\omega)$ judicieusement choisie.

$$\|\mathcal{S}(\omega)W(\omega)\|_\infty < 1 \quad (3.4)$$

C'est le problème que Zames (1981) a étudié et qui est à l'origine de l'essor fulgurant du réglage robuste. On en déduit un critère de performance robuste.

Théorème 3.2 : (Performance robuste) Si on satisfait les mêmes conditions préalables que pour la stabilité robuste et si de plus la performance est spécifiée par

$$\|\mathcal{S}(\omega)W(\omega)\|_\infty < 1$$

alors les performances du système sont robustes si \mathcal{S} et \mathcal{T} satisfont la condition suivante

$$\|\mathcal{T}_0(\omega) \Delta_m \overline{P}(\omega)\|_\infty + \|\mathcal{S}_0(\omega)W(\omega)\|_\infty < 1 \quad (3.5)$$

♦ ♦ ♦

Démonstration :

En nous référant à fig. 3.1, on a la condition géométrique

$$|1 + K(\omega)P(\omega)| \geq |1 + K(\omega)P_0(\omega)| - |K(\omega)P_0(\omega)| \Delta_m P(\omega)$$

En inversant cette expression

$$\begin{aligned} |S(\omega)| &= \frac{1}{|1 + K(\omega)P(\omega)|} \leq \frac{1}{|1 + K(\omega)P_0(\omega)| - |K(\omega)P_0(\omega)| \Delta_m P(\omega)} = \frac{\frac{1}{|1 + K(\omega)P_0(\omega)|}}{1 - |T_0(\omega)| \Delta_m P(\omega)} \\ &= \frac{|S_0(\omega)|}{1 - |T_0(\omega)| \Delta_m P(\omega)} \end{aligned}$$

On peut combiner cette expression avec la condition de performance (3.4), et ceci démontre le théorème

$$|S(\omega)W(\omega)| \leq \frac{|S_0(\omega)W(\omega)|}{1 - |T_0(\omega)| \Delta_m P(\omega)} < 1$$

...

Des formes indirectes, mais plus pratiques, de ces critères se présentent sous forme de marges de robustesse. Elles nous serviront ultérieurement à orienter notre procédure de robustification itérative d'un régulateur à deux degrés de liberté.

3.1.2 Marges de robustesse

Une approche algébrique d'étude de la robustesse consiste à incorporer les incertitudes paramétriques dans le calcul du régulateur. Une approche plus élégante consiste à définir des marges liées aux incertitudes. La marge de gain ΔK et la marge de phase $\Delta\phi$ ne suffisent plus car pour des systèmes d'ordre élevé, la courbe de Nyquist peut être très proche du point -1 alors que les marges de stabilité sont excellentes.

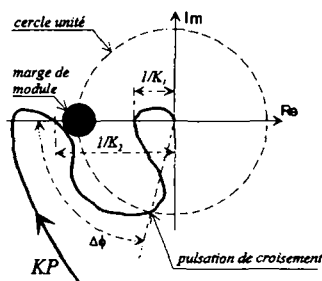


Fig. 3.2 : Caractérisation des marges de robustesses

1. Marge de gain

C'est l'intervalle ouvert $\Delta K =]K1, K2[$ qui contient tout régulateur scalaire K qui stabilise le procédé P lorsque on a la fonction de transfert en boucle ouverte KP .

2. Marge de phase

Si ω_0 est la pulsation au gain unité (pulsation de croisement), on définit la **marge de phase** $\Delta\phi$ par l'angle ϕ tel que $\text{Arg}[KP(j\omega_0)] = \pi + \phi \text{ modulo } 2\pi$.

3. Marge de module

Elle définit la plus petite distance entre le lieu de Nyquist et le point -1 .

$$\Delta M = \inf\{\|1 + KP(j\omega)\| : \omega \in \mathbf{R}\}$$

Géométriquement, on constate que

$$\Delta M = \frac{1}{\|S\|_{\infty}} \quad (3.6)$$

Remarque 3.1 Des minorants de la marge de gain et de la marge de phase peuvent être calculés à partir de la marge de module par les relations

$$\left[\frac{1}{1 + \Delta M}, \frac{1}{1 - \Delta M} \right] \subset \Delta K \quad (3.7)$$

$$\text{et } \Delta\phi \geq 2 \arcsin(\Delta M/2) \quad (3.8)$$

4. Marge de retard

Nous conviendrons d'appeler **marge de retard** ΔR la borne supérieure des retards τ tels que K stabilise $e^{-\tau s} P$. Cet opérateur produit un retard de phase $\tau\omega$ à la pulsation ω . S'il n'y a qu'une pulsation ω_0 au gain unité, la marge de retard est donnée par la formule :

$$\Delta R = \frac{\Delta\phi}{\omega_0} \quad (3.9)$$

Remarque 3.2 (Bourlès & Aïoun, 1993) La marge de retard peut également modéliser les dynamiques négligées associées à des pôles réels tels que des constantes de temps τ_1 ou τ_2 . Une marge de retard suffisante assure une bonne robustesse vis-à-vis de dynamiques négligées ne présentant pas de résonance. En effet,

$$\text{si } P = P_0 \frac{1}{1 + \tau_1 s} \frac{1}{1 + \tau_2 s} \quad (3.10a)$$

alors aux pulsations ω telles que $|\tau_i \omega| \ll 1$ et $\tau = \sum \tau_i$, on a

$$P \approx P_0 (1 - j\omega\tau) \approx P_0 e^{-j\omega\tau} \quad (3.10b)$$

5. Marge de module complémentaire

L'abaque de Hall est constituée de famille de λ -cercles

$$\text{de centre : } c = \frac{-\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \quad (3.11a)$$

$$\text{et de rayon : } r = \frac{\lambda}{|\lambda^2 - 1|} \quad (3.11b)$$

permettant de déterminer le facteur de résonance en boucle fermée ($\approx \mathcal{T}(j\omega)$). On définit la **marge de module complémentaire** ΔM_c comme étant la borne inférieure des quantités $\frac{1}{\lambda}$ telles que le lieu de Nyquist $KP(j\omega)$ reste extérieur au λ -cercle (avec $\lambda > 1$). Ce qui se traduit par l'équation

$$\Delta M_c = \frac{1}{\|\mathcal{T}\|_\infty}$$

Cette grandeur est liée à ΔK et $\Delta\phi$ par

$$]1 - \Delta M_c, 1 + \Delta M_c[\subset \Delta K \quad \text{et} \quad \Delta\phi \geq 2 \arcsin\left(\frac{\Delta M_c}{2}\right)$$

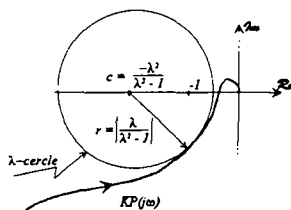


Fig. 3.3 : Facteur de résonance

Ce qui s'exprime par la condition (cf. Aïoun *et al* 1993)

$$\|\mathcal{T}(j\omega)\| < \lambda, \quad \forall \omega, \quad \omega < \omega_b \quad (3.11c)$$

La contrainte d'atténuation de 20dB par décade dans la bande de fréquence $[0, \omega_b]$ peut être exprimée par

$$\|S(j\omega)\| = \|1 - \mathcal{T}(j\omega)\| < 0.1, \quad \forall \omega, \quad \omega < \omega_b$$

$$\text{i.e. } 0.9 < \|\mathcal{T}(j\omega)\| < 1.1, \quad \forall \omega, \quad \omega < \omega_b$$

La valeur $\lambda = 1.3$ donne une bonne robustesse en pratique.

Remarque 3.3 La marge de module complémentaire est un critère de performance robuste. Elle peut être interprétée comme une spécification de robustesse de la boucle de réglage vis-à-vis des non linéarités appartenant au secteur

$$\text{Sec}\left[1 - \frac{1}{\lambda}, 1 + \frac{1}{\lambda}\right] \quad (3.12)$$

Nous donnons dans le tableau 3.2 les *valeurs typiques* de ces différentes marges.

Tab. 3.2 : Valeurs pratiques de marges de robustesse

ΔM	ΔR	ΔK	$\Delta \phi$	ΔM_c
$> 0,5$ ($> -6dB$)	T_e	> 2 ($\approx 6dB$)	$30^\circ \leq \Delta \phi \leq 60^\circ$	$\lambda \approx 1,3$

Le choix de la marge de module détermine des minorants pour la marge de gain et la marge de phase :

$$\Delta M \geq 0,5 \Rightarrow \Delta K \geq 2 ; \Delta \phi > 29^\circ$$

3.2 ROBUSTIFICATION BASEE SUR L'INCERTITUDE PARAMETRIQUE

3.2.1 Synthèse RST standard

La méthode de synthèse, dite RST, repose sur le système de la figure suivante

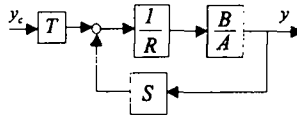


Fig. 3.4 : Régulateur à deux degrés de liberté

Le calcul du régulateur est basé sur la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\frac{BT}{AR + BS} = \frac{B_m}{A_m} = \frac{A_{obs} B_m}{A_{obs} A_m} \quad (3.13)$$

où A_m et B_m représentent la *dynamique de référence* que l'on peut « augmenter » par A_{obs} appelé communément *polynôme observateur*. On peut citer les trois stratégies de synthèse suivantes :

Feedforward pur :

Si on pouvait accepter une *commande en boucle ouverte*, un choix possible de paramètres de réglage serait :

$$R = BA_m \quad ; \quad S = 0 \quad ; \quad T = AB_m \quad (3.14)$$

Error feedback :

Par contre, si on préfère une commande en boucle fermée, on peut adopter la combinaison suivante :

$$R = B(A_m - B_m) \quad \text{et} \quad S = T = AB_m \quad (3.15)$$

Placement des pôles :

La façon la plus élégante pour résoudre un tel problème consiste à faire un *placement des pôles*. Nous faisons apparaître les factorisations possibles de (3.13) les détails de cette procédure se trouvent dans Aström et Wittenmark (1984) ou Goodwin et Sin (1984). Habituellement, on pose

$$B = B^+ B^- \quad , \quad B_m = B^- B'_m \quad \text{et} \quad R = B^+ R'$$

avec B^+ : un polynôme de factorisation unique, monique et contenant la portion stable de B
et B^- : la partie qui contient les zéros instables.

$$\frac{B^+ B^- T}{B^+ (AR' + B^- S)} = \frac{A_{obs} B^- B'_m}{A_{obs} A_m} \quad (3.16)$$

La résolution de l'équation caractéristique (3.16), qui est une identité de Bezout (ou équation de Diophantine), permet de calculer R et S ; c'est un problème de régulation. Le choix de T , permet de résoudre le problème d'asservissement. Si on utilise intégralement l'équation (3.13), on parlera de synthèse «sans annulation» des zéros. Si par contre, on ne garde que B^- , dans (3.16), on parlera de synthèse «avec annulation» des zéros, et la résolution de l'équation de Bezout est plus simple.

Cette procédure de synthèse en elle-même ne traite pas du problème de robustesse. Il faut introduire les incertitudes paramétriques et en tenir compte dans la détermination de la forme finale du régulateur. Les polynômes RST sont fixés par la mise au point de l'asservissement et de la régulation du système nominal. *A priori*, il nous reste A_{obs} comme moyen d'ajuster la robustesse du système global. Le terme *observateur* appliqué à A_{obs} n'est peut être pas approprié car, dans ce cas, ce polynôme devrait avoir des pôles plus rapides que les autres polynômes restants du problème. Or, l'amélioration de la robustesse d'un système consiste en général à ralentir la dynamique du système.

3.2.2 Bornes de robustesse

Nous présentons les étapes de calcul de robustesse du régulateur en essayant de quantifier cette notion. Au lieu d'appliquer les critères de robustesse formulées à la section 3.1.1, nous allons analyser globalement la stabilité du procédé incertain réglé à l'aide d'un régulateur RST .

Définissons le système bouclé de référence H_m qui sert à fixer les performances nominales

$$H_m = \frac{B_m}{A_m} = \frac{B_0 T}{A_0 R + B_0 S} \quad (3.17)$$

Lemme 3.1 : (Condition suffisante de robustesse pour une incertitude additive)

Pour une synthèse par placement de pôles basée sur le modèle incertain suivant

$$\frac{B}{A} = P_0 + \Delta_a P \quad ; \quad P_0 = \frac{B_0}{A_0}$$

La stabilité robuste avec le régulateur RST dépend de la condition de bornitude

$$|\Delta_a P| < \left| \frac{P_0}{H_m} \frac{T}{S} \right| \quad (3.18)$$

◆ ◆ ◆

Démonstration :

Reformulons le premier membre de (3.13) en faisant apparaître l'incertitude $\Delta_a P$

$$\begin{aligned} \frac{BT}{AR + BS} &= \frac{\frac{B}{A} T}{R \left(1 + \frac{BS}{AR} \right)} \\ &= \frac{(P_0 + \Delta_a P) T}{R \left[1 + (P_0 + \Delta_a P) \frac{S}{R} \right]} \end{aligned}$$

En isolant le système nominal au numérateur et en simplifiant par R

$$\frac{BT}{AR + BS} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta_a P}{P_0}\right) \frac{T}{R} P_0}{1 + (P_0 + \Delta_a P) \frac{S}{R}} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta_a P}{P_0}\right) TB_0}{A_0 R + B_0 S + \Delta_a P SA_0}$$

Divisons membre à membre le dernier résultat par $A_0 R + B_0 S$

$$\begin{aligned} \frac{BT}{AR + BS} &= \frac{\left(1 + \frac{\Delta_a P}{P_0}\right) \frac{TB_0}{A_0 R + B_0 S}}{(A_0 R + B_0 S) + \Delta_a P \frac{SA_0}{TB_0} TB_0} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{\Delta_a P}{P_0}\right) H_m}{1 + \Delta_a P \frac{H_m S}{P_0 T}} \end{aligned}$$

En appliquant maintenant le «Small Gain Theorem» (Vidyasagar, 1993) i.e. le terme dépendant de la fréquence au dénominateur doit être inférieur à 1 pour que le système incertain soit stable, on a le résultat :

$$|\Delta_a P| < \left| \frac{P_0 T}{H_m S} \right|$$

...

Lemme 3.2 (Condition suffisante de robustesse pour une incertitude multiplicative)

Pour une synthèse par placement de pôles basée sur le modèle incertain suivant

$$\frac{B}{A} = P_0 (1 + \Delta_m P) \quad ; \quad P_0 = \frac{B_0}{A_0}$$

La stabilité robuste avec le régulateur RST dépend de la condition suivante

$$|\Delta_m P| < \left| \frac{T}{H_m S} \right| \quad (3.19)$$

♦ ♦ ♦

Démonstration :

La démonstration est similaire à celle du lemme 3.1.

...

3.2.3 Régulateur RST robuste par le choix de A_{obs}

A. Robustification du placement de pôle

Nous allons montrer que l'on robustifie un système en ralentissant sa dynamique. Dans le cas particulier du régulateur numérique RST, on place des pôles lents (proche de 1).

Proposition 3.1 : (RST robuste) *On améliore la robustesse du système bouclé à travers le choix du polynôme A_{obs} qui permet de satisfaire une condition de robustesse. Plus les pôles de ce polynôme sont lents, plus le système sera robuste par rapport aux incertitudes paramétriques.*

◆◆◆

Eléments de démonstration :

A cause de la similarité des équations (3.18) et (3.19), nous traiterons seulement le cas de la borne additive. Il n'est pas très indiqué en présence d'incertitudes paramétriques de procéder à une annulation des zéros. Par hypothèse, les zéros d'un système incertain peuvent varier, donc l'annulation n'aura plus lieu et les dynamiques liées à ces termes réapparaissent.

Pour le placement des pôles, on peut scinder le polynôme A_m en deux contributions :

$$A_m = A_{bf} A_{obs} \quad \text{avec} \quad \max\{\deg A_m\} = 2 \deg A_0 = 2n \quad (3.20a)$$

$$\frac{BT}{AR + BS} = \frac{B_m}{A_m} = \frac{BT}{A_{bf} A_{obs}} \quad (3.20b)$$

Le deuxième membre de l'équation (3.18) s'exprime en fonction de A_{bf} et de A_{obs} :

$$\left| \frac{P_0 T}{H_m S} \right| = \left| \frac{\frac{B_0}{A_0} T}{\frac{BT}{A_{bf} A_{obs}}} \right| = \left| \frac{B_0}{A_0 BS} A_{bf} A_{obs} \right| \quad (3.21)$$

Le polynôme A_{bf} contient les pôles en boucle fermée du système qui détermine *a priori* les qualités du système. Plus les pôles choisis sont lents, plus le système bouclé a des prédispositions à la robustesse. Le polynôme observateur A_{obs} est un degré de liberté supplémentaire pouvant servir à robustifier itérativement A_m sur la base d'un polynôme A_{bf} choisi. On peut varier le degré du polynôme A_{obs} de 0 à $\deg A_0$. Comme ces polynômes sont exprimés en fonction de z^{-1} , on constate que le choix $A_{obs} = 1$ correspond à un observateur dead beat.

◆◆◆

Limites de placement des pôles :

- Stratégie "Mean-level" :

Le cas extrême consiste à garder, pour le système en boucle fermée, la même dynamique qu'en boucle ouverte. Cette stratégie s'appelle "*mean-level*". Avec l'hypothèse $B_m = B_0$, ce choix correspond à

$$A_m = A_0 \Rightarrow A_0 R + B_0 S = A_0 T = A_0 A_{obs} \quad (3.22)$$

Nous admettons ceci comme la dynamique la plus lente que l'on prescrit au système dynamique et constitue la *limite inférieure* pour placer la partie réelle des pôles.

- Stratégie "Dead-beat" :

Par contre, une synthèse sensée viserait une dynamique en boucle fermée deux à trois fois plus rapide que celle du procédé en boucle ouverte. La stratégie "*dead-beat*" quant à elle, correspond théoriquement à la réponse la plus rapide d'un système asservi. Elle équivaut à placer tous les pôles du système réglé à l'origine.

$$A_m = z^n \Rightarrow A_0 R + B_0 S = z^n T = z^n A_{obs} \quad (3.23)$$

Elle correspond à la dynamique la plus rapide qu'on puisse fixer pour le système asservi et constitue la *limite supérieure* de placement de pôles.

Avec la stratégie mean-level, nous avons l'éventualité de pouvoir calculer le régulateur sans devoir résoudre l'équation de Bezout.

B. Calcul de borne

Nous allons montrer l'existence d'une corrélation entre l'incertitude paramétrique maximale et le polynôme A_{obs} . En premier lieu, nous traitons le cas particulier du mean-level car les autres choix peuvent en être déduits. Ensuite, on imposera que le régulateur contienne un intégrateur. Et enfin, en mettant à profit la présence de l'intégrateur et une hypothèse supplémentaire, on présentera une expression simple de la borne de robustesse.

Soit l'équation caractéristique du placement de pôles

$$A_0 R + B_0 S = A_0 A_{obs} \quad (3.24)$$

On force le régulateur à avoir au moins un intégrateur ($\Delta = z - 1$) i.e.

$$R = R' \Delta^l \quad (3.25)$$

Dans l'équation (3.24), A_0 apparaît comme facteur de S .

$$S = S' A_0 \quad (3.26)$$

L'équation caractéristique devient $R' \Delta^l + B_0 S' = A_{obs}$

Si on admet que $\deg S = \deg A_0$, S' est un scalaire qui vaut :

$$S' = \frac{A_{obs}(1)}{B_0(1)}$$

Cette dernière hypothèse va influencer l'ordre du régulateur robuste à une valeur au moins égale à $\deg A_0$. Par conséquent

$$S = \frac{A_{obs}(1)}{B_0(1)} A_0$$

La borne de robustesse additive, qui ne dépend plus que d'un seul polynôme inconnu, devient

$$|\Delta_a P| < \left| \frac{A_{obs}}{A_0} \frac{B_0(1)}{A_{obs}(1)} \right| \quad (3.27)$$

En définissant le gain statique $g(1)$ du procédé nominal

$$g(1) = \frac{B_0(1)}{A_0(1)} = P_0(1)$$

on a une autre forme de la **borne de robustesse**

$$|\Delta_a P| < \left| g(1) \frac{A_{obs}}{A_{obs}(1)} \frac{A_0(1)}{A_0} \right| \quad (3.28)$$

Notre but est de trouver toutes les bornes possibles en fonction du polynôme observateur A_{obs} paramétrisé par un polynôme F . Quelques résultats clés sont reportés dans le tableau 3.3. Il peut arriver que le polynôme A_{obs} choisi ne satisfasse pas l'équation (3.28). Le tableau de bornes de robustesse ci-dessous permet d'orienter le choix itératif du polynôme A_{obs} qui débouchera sur la solution robuste avec le moins de conservatisme. Les deux premières colonnes de ce tableau correspondent à un polynôme A_{obs} qui contribue à l'accélération de la dynamique du système réglé, tandis que les choix des quatre dernières colonnes sont équivalentes au ralentissement de cette dynamique.

Tab. 3.3 : Bornes de robustesse correspondant au choix de A_{obs}

A_{obs}	z^n	$z^n F$	I	F	A_0	FA_0	A_0^2
borne	$\left \frac{I}{A_0 S} \right $	$\left \frac{F}{A_0 S} \right $	$\left g(I) \frac{A_0(I)}{A_0} \right $	$\left g(I) \frac{F}{F(I)} \frac{A_0(I)}{A_0} \right $	$ g(I) $	$\left g(I) \frac{F}{F(I)} \right $	$\left g(I) \frac{A_0}{A_0(I)} \right $

Remarque 3.4

- Les deux premières colonnes du tableau 3.3 sont calculées avec la stratégie dead-beat. S apparaît au dénominateur, ceci vient de l'impossibilité de calculer S par l'équation de Bezout car le facteur A_0 fait défaut dans le deuxième membre de (3.24).
- La présence de A_{obs} au numérateur contre-balance l'effet de A_0 au dénominateur en empêchant la dégringolade de la borne à haute fréquence. Plus les racines de A_{obs} sont lentes (éloignées de l'origine) par rapport à celles de A_0 , plus le système est robuste. Par contre, A_{obs} n'a pas d'effet à basse fréquence. Cela se traduit par l'équation triviale

$$\frac{A_{obs}}{A_{obs}(I)} = I \quad \text{à basse fréquence} \quad (3.29)$$

On peut déduire la synthèse robuste suivante :

Démarche de synthèse robuste :

- Mettre au point la caractéristique de la boucle en résolvant l'identité de Bezout

$$A_0 R + B_0 S = A_0 A_{obs}$$
- Tester sur un diagramme de Bode la robustesse du régulateur obtenu à l'aide de (3.18), ou de (3.19).
- En cas de robustesse insuffisante, réitérer la synthèse avec un nouveau polynôme observateur jusqu'à satisfaire la condition de bornitude.

3.3 ROBUSTIFICATION BASEE SUR LA PERTURBATION EMULEE

Nous entendons par structure robuste un schéma de réglage formé du procédé incertain et d'un régulateur capable de résorber les dégradations de la stabilité provoquée par des variations paramétriques. Nous allons définir d'abord un modèle du procédé (§ 3.3.1), puis un schéma de réglage (§ 3.3.2 et 3.3.3) RST qui se prête à une robustification à l'aide d'un polynôme supplémentaire $Q(z)$. Ce schéma est inspiré de Tsytkin (1991). Nous proposerons enfin une procédure itérative (§ 3.3.5) qui incorpore la méthode de la section 3.2.

3.3.1 Modèle du procédé

Terminologie :

Les développements dans cette section seront formulés par des systèmes discrets.

Nous présentons les modèles les plus utilisés :

- Système (réel) perturbé :

$$P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (3.30a)$$

- Système nominal :

$$P_0(z) = \frac{B_0(z)}{A_0(z)} \quad (3.30b)$$

- Perturbation (paramétrique) additive :

$$\begin{aligned} \Delta_a P(z) &= P(z) - P_0(z) \\ &= \frac{[BA_0 - B_0A]}{AA_0} \end{aligned} \quad (3.30c)$$

- Perturbation (paramétrique) multiplicative :

$$\Delta_m P(z) = \frac{P(z) - P_0(z)}{P_0(z)} \quad (3.30d)$$

Définissons \mathbf{P} , l'ensemble des modèles de procédé avec perturbation additive, comme

$$\mathbf{P} = \{P(z) \mid P(z) = P_0(z) + \Delta_a P(z)\} \quad (3.31)$$

A l'aide de l'équation (3.30d), la déduction d'un domaine utilisant une perturbation multiplicative est triviale.

Signal de perturbation exogène :

Dans un premier temps, considérons le modèle ARMA :

$A y = B u + d'$	(3.32)
------------------	--------

illustré par la figure 3.1 :

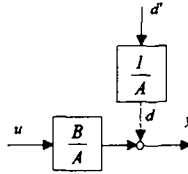


Fig. 3.1 : Modèle de procédé perturbé

Ce modèle traduit l'effet d'un signal externe qui perturbe la sortie y . On doit lui rajouter les signaux supplémentaires dus aux variations de la fonction de transfert du procédé.

Perturbation paramétrique :

Nous modéliserons le système doublement perturbé (bruit de mesure en sortie et signaux supplémentaires dus aux incertitudes). Pour une incertitude additive,

$$A = A_0 + \delta A \text{ et } B = B_0 + \delta B \quad (3.33a)$$

dans le modèle (3.33a), on peut séparer la partie nominale des perturbations

$$A_0 y = B_0 u + [d + \delta B u - \delta A y] \quad (3.33b)$$

Posons

$$\pi = [d + \delta B u - \delta A y] \quad (3.34)$$

Nous appelons **perturbation étendue** la grandeur π qui est représentée schématiquement à la figure 3.5..

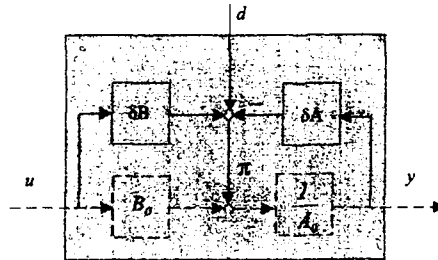


Fig. 3.5 : Modèle de perturbation

Remarque 3.5

Si l'on disposait d'une estimation du signal $\pi(t)$, il serait possible de le compenser pour rendre l'asservissement plus performant.

B. Emulateur de perturbation

L'estimation en ligne de $\pi(t)$ (identification ou filtrage de Kalman) est écartée d'emblée. D'une manière intuitive, l'émulation de la perturbation étendue, $\pi(t)$, est l'écart entre un signal réel (entaché de bruit) et un signal (idéal) provenant d'un modèle du processus. Nous suggérons quelques modèles *a priori* pour $\pi(t)$.

$$1. \hat{\pi}(t) = u(t) \quad (3.36)$$

Cette équation signifie que la commande peut constituer une perturbation. Prenons le cas d'une réponse indicielle quelconque : le signal d'erreur diminue avec le temps. Mais, si le procédé comporte un retard important, la contre-réaction de mesure tarde et l'erreur demeure anormalement élevée. Celle-ci provoque une commande démesurée par rapport à ce qui est nécessaire. Dans ce cas précis, la commande s'apparente à une anomalie pour le régulateur. Le prédicteur de Smith met à profit une contre-réaction déjà au niveau de la commande. On connaît bien l'amélioration, au niveau de l'asservissement, apportée par cette démarche. En dehors de ce cas particulier très important, on améliore le fonctionnement d'un système à déphasage non minimal en pondérant la commande de cette manière. Néanmoins, une telle démarche ne compense pas les effets d'incertitudes paramétriques.

$$2. \hat{\pi}(t) = y(t) - \tilde{P}(q) u(t) \quad (3.37)$$

L'utilisation d'un modèle en parallèle avec le procédé réel permet d'approcher en temps réel le signal $\pi(t)$. Cette idée est à l'origine du régulateur IMC. Nous introduisons la notation \tilde{P} qui correspond à un modèle de conduite du procédé. Le cas $\tilde{P} = P_0$ n'est qu'un choix particulier parmi d'autres.

D'après la figure 3.7, avec $\varepsilon = y - \tilde{y}$, si le système nominal est égal au modèle parallèle ($\tilde{P} = P_0$), alors $\varepsilon(t) = \pi(t)$

Montrons d'abord l'expression générale par $\varepsilon(t)$ en fonction de \tilde{P} et ensuite $\varepsilon(t) = \pi(t)$ pour $\tilde{P} = P_0$.

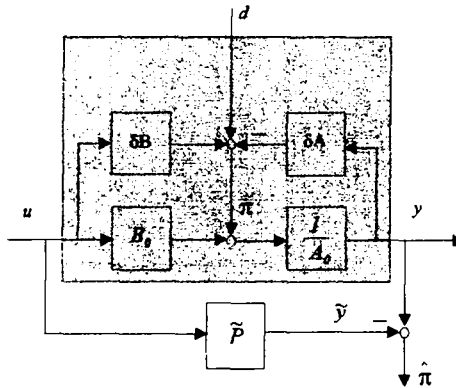


Fig. 3.7 : Emulation de $\pi(t)$ à l'aide d'un modèle parallèle

$$3. \quad \tilde{A}(q)\hat{\pi}(t) = \tilde{A}(q)y(t) - \tilde{B}(q)u(t) \quad (3.40)$$

Il est possible de choisir à la place de \tilde{P} en parallèle, un modèle de conduite série-parallèle (figure 3.8).

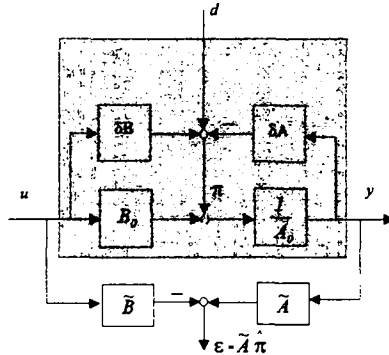


Fig. 3.8 : Emulation de $\pi(t)$ à l'aide d'un modèle série-parallèle

On remarque que $\varepsilon(t)$ est identique à $A_0 \pi$ si $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ correspond exactement au procédé nominal $[A_0, B_0]$.

Nous pouvons incorporer ces schémas d'émulation de perturbation dans un système de réglage à deux degrés de liberté. L'aspect stabilité ne pose pas de problème particulier pour le premier type d'émulateur (modèle parallèle). Il est contenu dans l'étude de stabilité interne du système. Pour le deuxième type (modèle série-parallèle), Johnson (1976) présente une investigation fouillée de l'aspect stabilité du système englobant cet émulateur de perturbation.

C. Construction du régulateur

La structure de réglage est suggérée par la figure 3.6. On va préciser le bloc d'émulation dans cette partie

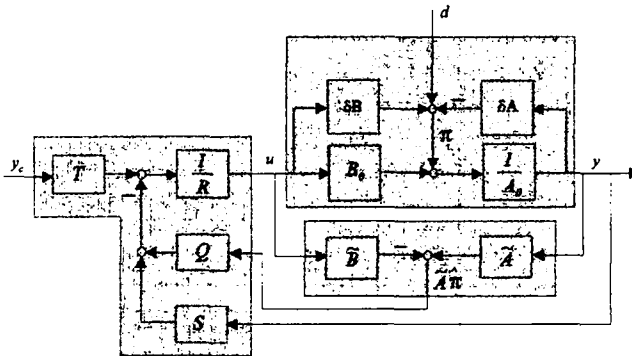


Fig. 3.9 : Régulateur robustifié via l'émulation de $\pi(t)$

L'émulateur n'est autre qu'un observateur très simplifié. Nous proposons trois choix pour $[\tilde{A}, \tilde{B}]$:

1. Structure série-parallèle, modèle nominal

$$\tilde{A} = A_0 \text{ et } \tilde{B} = B_0 \quad (3.41)$$

Tout naturellement, on adopte une structure série-parallèle simple à mettre en oeuvre.

2. Structure parallèle, modèle interne

On retrouve une structure IMC si l'on divise cette boucle interne par \tilde{A} i.e.

$$\tilde{A} := I, \quad \tilde{B} := \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \text{ et } Q := \frac{Q}{\tilde{A}} \quad (3.42)$$

La différence avec le schéma IMC habituel est que le système ne «fonctionne» pas en boucle ouverte quand le modèle $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ est exact. La boucle S reste en contre-réaction.

3. Structure série-parallèle, modèle prédictif

On peut utiliser, en lieu et place de $[\tilde{A}, \tilde{B}]$, les blocs de prédiction du GPC après quelques arrangements :

$$\tilde{A} := k^T \Phi, \quad \tilde{B} := k^T \Psi \quad (3.43)$$

Les détails de calcul de Φ et Ψ se trouvent dans Clarke et Mohtadi (1989) ou Schneider (1991).

3.3.3 Régulateur Q-RST

Nous allons proposer une nouvelle méthode de calcul du régulateur RST. Au départ, les polynômes du régulateur nominal dénotés R_0 et S_0 sont calculés de manière habituelle en utilisant le modèle nominal du procédé (A_0 et B_0). L'utilisation de $\hat{\pi}$, pondéré par le polynôme Q selon la figure 3.9, comme contre-réaction supplémentaire nous ramène à une paramétrisation de type Youla du régulateur RST. Si on impose que notre régulateur comporte un intégrateur et moyennant une hypothèse supplémentaire sur le polynôme S , le calcul de R et S se trouvera grandement facilité. Le régulateur ainsi calculé dépend de deux paramètres : les polynômes Q et A_{ob} , qui seront ajustés librement pour fixer la capacité de régulation de la boucle, ainsi que sa robustesse.

A. Schéma équivalent

Proposition 3.2 (Equivalence RST de notre schéma) *Le schéma de réglage robuste (avec l'émulateur de perturbation de structure série-parallèle) proposé correspond à un régulateur RST dont*

$$R = R_0 - B_0 Q \quad (3.44a)$$

$$\text{et } S = S_0 + A_0 Q \quad (3.44b)$$

On obtient ainsi une paramétrisation de Youla du régulateur RST.

$$\frac{S}{R} = \frac{S_0 + A_0 Q}{R_0 - B_0 Q} \quad (3.44c)$$

◆ ◆ ◆

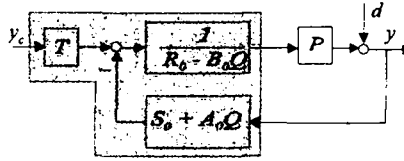


Fig. 3.10 : Equivalent RST de notre régulateur robuste

Démonstration :

De l'équation du régulateur (3.35) et de l'émulateur de perturbation (3.40)

$$\begin{aligned} R_0 u &= Ty_c - S_0 y - QA_0 \hat{\pi} \\ &= Ty_c - S_0 y - Q(A_0 y - B_0 u) \end{aligned}$$

On peut regrouper les termes

$$(R_0 - QB_0)u = Ty_c - (S_0 + QA_0)y$$

C'est-à-dire

$$Ru = Ty_c - Sy$$

...

Remarque 3.6

Le *régulateur central* ($\equiv Q = 0$) correspond à la solution habituelle du RST.

B. Synthèse du régulateur à l'aide de A_{obs} et Q

Le régulateur est calculé à partir de l'équation caractéristique

$$AR + BS = A_m A_{obs} \quad (3.45)$$

Hypothèse :

R contient au moins un intégrateur $\Delta = 1 - q^{-l}$

$$R = \Delta^l R', \quad l \geq 1 \quad (3.46)$$

Proposition 3.3 (Calcul du régulateur)

En résolvant l'équation caractéristique avec la stratégie mean-level, on obtient les équations constitutives du régulateur

$$S = A_0 \left[\frac{A_{obs}(l)}{B_0(l)} + Q \right] \quad (3.47)$$

$$R = A_{obs} - B_0 \left[\frac{A_{obs}(l)}{B_0(l)} + Q \right] \quad (3.48)$$

◆ ◆ ◆

Démonstration :

La stratégie mean-level correspond à l'équation caractéristique

$$A_0 [\Delta^l R_0' - B_0 Q] + B_0 [S_0 + A_0 Q] = A_0 A_{obs}$$

Solution centrale

Pour $Q = 0$, l'équation caractéristique devient

$$A_0 \Delta^l R_0' + B_0 S_0 = A_0 A_{obs} \quad (3.49)$$

Cette équation suggère que A_0 est un facteur de S_0 , i.e.

$$S_0 = S_0' A_0$$

Admettons que S_0' soit une constante, alors en passant par le gain statique de l'équation caractéristique, on a :

$$S_0' = \frac{A_{obs}(1)}{B_0(1)}$$

$$\text{et } S_0 = \frac{A_{obs}(1)}{B_0(1)} A_0 \quad (3.50a)$$

D'où l'expression de R_0

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{A_0} [A_0 A_{obs} - B_0 S_0] \\ &= A_{obs} - \frac{A_{obs}(1)}{B_0(1)} B_0 \end{aligned} \quad (3.50b)$$

Solution paramétrisée

D'après la proposition 3.2,

$$S = S_0 + A_0 Q = A_0 \left[\frac{A_{obs}(1)}{B_0(1)} + Q \right]$$

$$R = R_0 - B_0 Q = A_{obs} - B_0 \left[\frac{A_{obs}(1)}{B_0(1)} + Q \right]$$

...

En observant les équations (3.47) et (3.48), on peut relever que notre régulateur a un ordre assez élevé puisque $\deg S \geq \deg A_0$. En nous référant à la borne de robustesse (3.28), il est possible de fixer le polynôme de synthèse A_{obs} si on avait une indication explicite sur la forme de l'incertitude ΔP_ϕ . Enfin, le polynôme Q constitue un deuxième paramètre libre de robustification du régulateur.

3.3.4 Comparaison de Q-RST, IMC et RST-Landau

Une autre méthodologie pour la conception de **régulateur robuste type RST** est proposée par (Landau *et al*, 1993). Elle propose la combinaison du placement de pôles avec le calibrage de la réponse fréquentielle de S . En gros, R et S sont factorisés en des composantes pré-spécifiées (H_S et H_R) qui sont les parties fixes du régulateur :

$$R = R' H_R \quad (3.51)$$

$$S = S' H_S \quad (3.52)$$

Avec les composantes R' et S' , l'équation caractéristique qui sert au placement des pôles devient

$$A_m A_{obs} = A H_R R' + B H_S S' \quad (3.53)$$

Nous allons comparer les régulateurs Q-RST, IMC et RST_{GR}, c.f. Landau (1993).

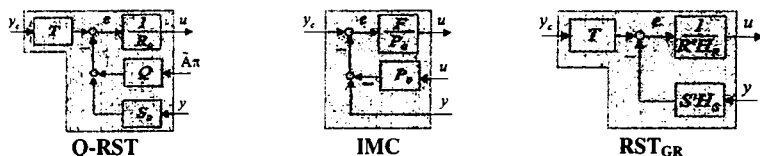


Fig. 3.11 : Régulateurs polynomiaux robustes

1. Simplicité de mise en oeuvre : IMC (Morari & Zafiriou, 1989) est sans conteste la méthode la plus intuitive des trois, et donc la plus abordable. Notre proposition Q-RST pourrait être résolue sans passer par la résolution de l'équation de Diophantine et sa mise en oeuvre s'en trouve facilitée par rapport au RST.

2. Nature prédictive de la régulation : Cette propriété est liée à l'utilisation directe d'une contre-réaction de la commande. Elle n'apparaît pas explicitement dans RST. Elle est sous-jacente dans la mise au point de Q-RST et IMC.

3. Traitement explicite des perturbations : Toute boucle de retour a comme rôle principal la compensation des perturbations. Par rapport à RST qui n'utilise qu'une information en aval de la perturbation (la sortie $y(t)$), IMC et Q-RST utilisent concurremment ce même signal et un autre en amont de la perturbation (la commande $u(t)$). Dans ce dernier cas, Q-RST est proche du concept "d'estimation de perturbation".

3. Découplage dynamique/perturbation : IMC fonctionnera en boucle ouverte au cas où il n'y a pas de perturbation et si le modèle concorde parfaitement avec le procédé réel. RST ne tient pas du tout compte explicitement de la séparation des traitements de la dynamique utile et des perturbations. Le même régulateur est sensé assurer ces deux fonctions par le choix de polynômes R et S suffisamment efficaces. Q-RST de par la définition de sa structure, traite séparément via le polynôme Q la perturbation étendue $\pi(t)$ et la dynamique du système à travers S . Elle fonctionne comme un RST dans le cas idéal, et non en boucle ouverte comme IMC.

5. Capacité de robustification : La qualité de robustesse est ajustée par les paramètres libres tels que A_{obs} , Q , F , H_R ou H_S . Dans tous les cas, l'ajustage des valeurs de ces paramètres se fait itérativement. Dans le cas du IMC, le terme d'ajustement revient au scalaire λ utilisé dans le filtre d'après l'équation

$$F = \frac{I}{(\lambda s + I)^r} \quad (3.54)$$

On constate ainsi une sévère limitation de la capacité de robustification du réglage IMC. La robustesse de la méthode RST-Landau est ajustée avec le choix des polynômes H_R et H_S . A cause de l'équation de Diophantine, il faut que AH_R et BH_S soient premiers entre eux (coprimés). La robustesse de Q-RST est ajustée par le choix de A_{obs} et de Q . Nous avons signalé auparavant (3.44c) que notre régulateur réalise une paramétrisation de Youla du RST. Signalons enfin que, comme IMC, Q-RST est intrinsèquement astatique,

i.e. que pour sa version centrale, il se comporte comme un intégrateur en régime permanent :

$$\lim_{z \rightarrow 1} R = 0 \quad (3.55)$$

Tab. 3.4 : Comparaison de trois régulateurs robustes

régulateurs	Q-RST	IMC	RST _{GR}
fonction de transfert	$K_{Q-RST} = \frac{S_{eq}}{R_{eq}} = \frac{A_0 \left[\frac{A_{obs}(I)}{B_0(I)} + Q \right]}{A_{obs} - B_0 \left[\frac{A_{obs}(I)}{B_0(I)} + Q \right]}$	$K_{IMC} = \frac{F A_0}{B_0}$	$K_{RST} = \frac{S' H_S}{R' H_R}$
paramètres de robustification	A_{obs} et Q	λ	H_R et H_S

Plus précisément, Q a permis d'explorer l'espace des régulateurs stabilisants déterminé par le polynôme $A_m A_{obs}$. Le régulateur Q-RST a une capacité de robustification considérablement améliorée par rapport au IMC dont la robustesse est ajustée à l'aide du seul paramètre scalaire λ et r .

3.3.5 Autre stratégie de synthèse d'un régulateur Q-RST

Avec la paramétrisation de Youla du régulateur RST, les polynômes A_{obs} et Q interviennent additivement. Nous allons suggérer une paramétrisation multiplicative du problème.

A. Fonctions de sensibilité et gabarit de robustesse

La robustification du régulateur est basée sur les fonctions de sensibilité que l'on définit sur la base du schéma suivant :

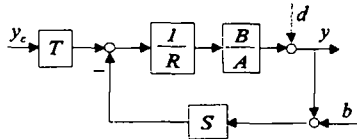


Fig. 3.12 : Boucles RST en présence de perturbations

Sensibilité sortie/perturbation :

$$\frac{y}{d} = S = \frac{AR}{AR + BS} = \frac{AR}{A_m A_{obs}} \quad (3.56)$$

La robustification dépend en grande partie des spécifications imposées à la sensibilité S

Sensibilité sortie/bruit de mesure :

$$\frac{y}{b} = -\mathcal{T} = \frac{-BS}{AR + BS} = \frac{-BS}{A_m A_{obs}} \quad (3.57)$$

Gabarit de robustesse :

La mise au point du régulateur Q-RST est itérative. On adopte l'équivalence entre la marge de retard et l'incertitude multiplicative (cf. remarque 3.2).

$$\begin{aligned} P &= P_0(1 + \Delta_m) \\ &= P_0(1 + (1 - z^{-1})) \end{aligned}$$

A chaque itération, un gabarit, que nous empruntons à (Landau, 1993), indique la qualité de la robustesse i.e. la condition de robustesse (équ. 3.3b) devient

$$\|\mathcal{T}\|_{\infty} < \frac{1}{\left| \overline{\Delta_m P} \right|} = \frac{1}{|1 - z^{-1}|}$$

A partir de l'inégalité triangulaire, on obtient le **gabarit de robustesse** :

$$1 - \|\mathcal{T}\|_{\infty} \leq |\mathcal{S}| \leq 1 + \|\mathcal{T}\|_{\infty} \quad (3.58)$$

$$\text{i.e. } 1 - \frac{1}{|1 - z^{-1}|} \leq |\mathcal{S}| \leq 1 + \frac{1}{|1 - z^{-1}|}$$

où $z = e^{-j\omega}$ avec $0 \leq \omega \leq \pi$

La marge de module, cf. équ. 3.6, (dont la valeur est choisie par le concepteur) constitue une contrainte de robustesse supplémentaire.

B. Alternative à la paramétrisation de Youla

Nous avons besoin de quelques hypothèses pour préciser cette nouvelle méthode de synthèse.

Hypothèse 1 :

Le régulateur sera calculé en résolvant une identité de Bezout.

Hypothèse 2 :

Il contiendra d'office un intégrateur

i.e. $R = R' \Delta$.

Hypothèse 3 :

La factorisation ne porte que sur R tandis que S s'ajustera librement

i.e. $R' = R'' Q$

Autrement dit, on va seulement intervenir au niveau des pôles du régulateur et ne rien imposer au niveau de ses zéros. Une paramétrisation de S est superflue (cf. Landau, 1993) car elle serait redondante avec A_{obs} .

Hypothèse 4 :

L'espace des régulateurs stabilisants est déterminé par le polynôme $A_m A_{obs}$. Cet espace est paramétrisé par le polynôme A_{obs} qui, d'après le § 3.2.3, fixe une borne de robustesse assujettie à une incertitude paramétrique connue.

Hypothèse 5 :

A l'aide du polynôme Q , on explore itérativement l'espace des régulateurs stabilisants pour aboutir à une robustesse définie à l'aide d'un gabarit.

Equations de synthèse :

Le régulateur sera mis au point à l'aide de l'identité de Bezout suivante :

$$(AQ)R''\Delta + BS = A_m A_{obs} \quad (3.59)$$

Remarque 3.7 En nous référant aux équations (3.56) et (3.57), Q (via R) privilégie la mise en forme de S tandis que A_{obs} celle de T .

Nous choisissons, d'après Tuncelli (1992), les degrés des différents polynômes :

$$\begin{aligned} \deg\{A_{obs}\} &= \deg\{A\} + \deg\{AQ\} - \deg\{A_m\} - 1 \\ \deg\{R'\} &= \deg\{A_m\} + \deg\{A_{obs}\} - \deg\{AQ\} \\ \deg\{S\} &= \deg\{AQ\} - 1 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Démarche de synthèse :

Les différentes étapes de mise au point du régulateur robuste sont illustrées par l'organigramme suivant :

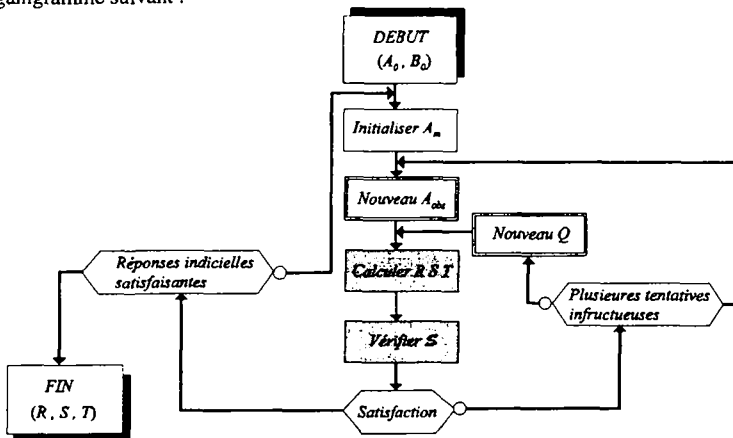


Fig. 3.13 : Démarche itérative de synthèse Q-RST

Remarque 3.8 La méthode de synthèse que nous venons de proposer diffère de celle de Landau (1993) par le fait que l'on ne cherche pas *a priori* à intervenir au niveau de S . D'autre part, nous avons une explication moins empirique du rôle de A_{obs} .

3.4 EXEMPLE D'APPLICATION

Exemple de synthèse d'un régulateur Q-RST

Initialement, on procède à la synthèse d'un régulateur RST classique. La recherche de robustesse proprement dite est itérative. Après la spécification de A_m qui fixe les performances nominales, on procède à la robustification à travers les choix de A_{ob} et Q . La démarche itérative essaie de donner une sensibilité S dans les limites d'un gabarit constitué par la marge de module et les marges supérieure et inférieure de retard selon Landau (1993).

Exemple : « bras souple du LAG »

1. Modélisation

Nous avons choisi le bras souple du Laboratoire d'Automatique de Grenoble (LAG) pour illustrer la synthèse Q-RST. Cette installation constitue une référence. En gros, on commande la position de l'extrémité d'un bras manipulateur très souple (15 modes de vibration) que nous présentons avec la notation empruntée à MATLAB. Pour les modèles adoptés (figure 3.14 et 3.15), on ne retient que les trois premiers modes résonnants bien visibles sur la caractéristique fréquentielle.

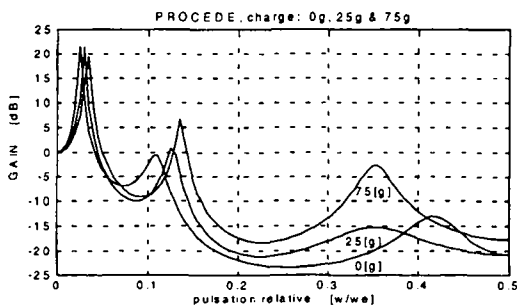


Fig. 3.14 : Diagramme d'atténuation du bras souple

Modèle nominal (sans charge) :

$$A0=[1,-2.14437,1.75906,-0.961539,1.20525,-1.54819,0.774686];$$

$$B0=[0.054037,-0.162508,0.261206,-0.134469,0.0256689];$$

$$d=1;$$

Modèle avec 25[g] en bout de bras :

$$A25=[1,-2.45389,2.27894,-1.02085,0.628664,-0.85989,0.474607];$$

$$B25=[0.0393523,-0.116242,0.178397,-0.0893726,0.0139438];$$

$$d=1;$$

Modèle avec 75[g] en bout de bras :

$$A75=[1,-1.96501,0.45148,1.33546,-0.438726,-0.97402,0.626318];$$

$$B75=[0.0390205,-0.098099,0.0972530,0.0260669,-0.0447154];$$

$$d=1;$$

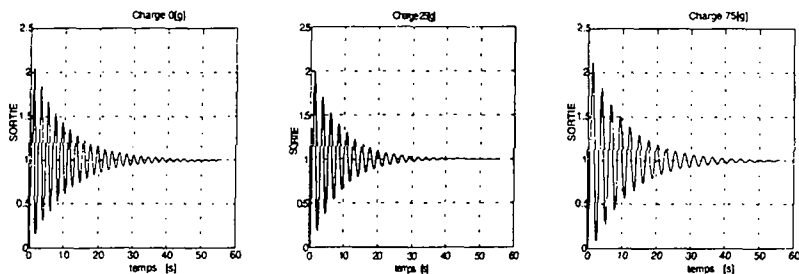


Fig. 3.15 : Réponses indicielles des modèles en boucle ouverte

Tab. 3.5 : Pôles et zéros du système discret

	0 [g]	25 [g]	75 [g]
pôles	-0.5426 + 0.7268i	-0.4217 + 0.5848i	-0.7318 + 0.4150i
	-0.5426 - 0.7268i	-0.4217 - 0.5848i	-0.7318 - 0.4150i
	0.6434 + 0.7353i	0.6743 + 0.6883i	0.7337 + 0.5985i
	0.6434 - 0.7353i	0.6743 - 0.6883i	0.7337 - 0.5985i
	0.9713 + 0.2071i	0.9743 + 0.1846i	0.9805 + 0.1603i
	0.9713 - 0.2071i	0.9743 - 0.1846i	0.9805 - 0.1603i
zéros	1.1573 + 1.3178i	1.1247 + 1.2483i	1.1835 + 1.0893i
	1.1573 - 1.3178i	1.1247 - 1.2483i	1.1835 - 1.0893i
	0.3464 + 0.1856i	0.3522 + 0.0381i	0.7431
	0.3464 - 0.1856i	0.3522 - 0.0381i	-0.5961

2. Synthèse classique par placement de pôles

Pour démarrer la résolution du problème, nous avons choisi les valeurs initiales suivantes :

Placement des pôles : $AmAobs = [1, -0.80] * [1, -0.75]$

Marge de retard : une période d'échantillonnage

Marge de module : $\Delta M = 6[dB]$

Avec ces valeurs, on obtient un premier régulateur RST qui est stabilisant pour le procédé sans charge mais ne stabilise pas les systèmes avec charges de 25 grammes et de 75 grammes comme le montre la figure 3.16 .

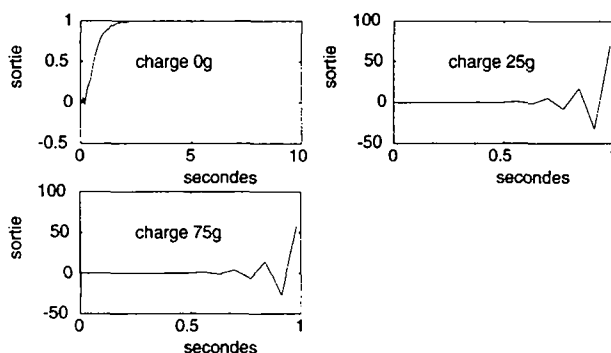


Fig. 3.16 : Réponses indicielles du système non robustifié

3. Synthèse itérative robuste

En procédant selon l'ordinogramme de la figure 3.13, on trouve un régulateur robuste. Nous proposons les résultats de deux politique de recherche :

Itérations axées sur $Q(z)$:

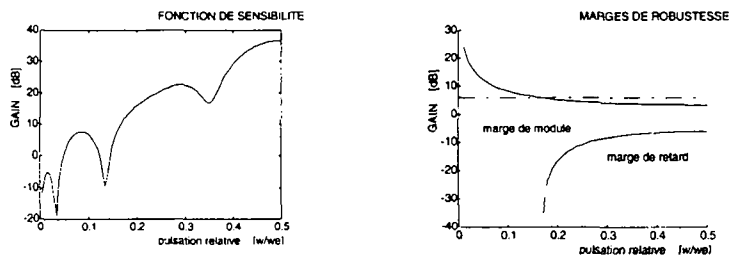


Fig. 3.17 : Caractéristiques fréquentielles d'un placement de pôles (non robuste)

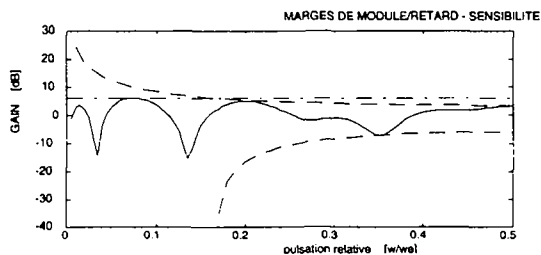


Fig. 3.18 : Caractéristiques fréquentielles d'un placement de pôles robustifié

Dans notre cas, $T(z)$ joue uniquement le rôle d' « adaptateur de gain statique ». On obtient un régulateur stable (la notion de stabilité interne est assurée) mais à déphasage non minimal. Ce régulateur, d'ordre 14, contient par conception un intégrateur. Sur la figure 3.19, sont reportées les trois réponses indicielles du système robustifié correspondant aux trois charges.

Tab. 3.6 : Pôles et zéros du régulateur

Régulateur	R	S	T
Coefficients des polynômes	1.0000	0.3460	0.5889
	0.5944	1.2349	0
	0.0794	1.2176	0
	0.0659	-0.9615	0
	-0.5460	-0.9590	0
	-0.4293	-1.1543	0
	-0.3596	-0.2444	0
	-0.3980	-0.2204	0
	-0.0983	-0.4112	0
	0.0920	0.4858	0
	0.0239	0.8583	0
	-0.0243	0.3882	0
	0.0004	0.0051	0
	-0.0002	0.0037	0
	0.0000	0.0001	0
racines	1.0000	-1.9709 + 1.0903i	
	0.3474 + 0.7859i	-1.9709 - 1.0903i	0
	0.3474 - 0.7859i	0.9790 + 0.1255i	0
	-0.1686 + 0.8841i	0.9790 - 0.1255i	0
	-0.1686 - 0.8841i	0.4166 + 0.7754i	0
	-0.8000	0.4166 - 0.7754i	0
	-0.8000	-0.3240 + 0.9195i	0
	-0.5259 + 0.3821i	-0.3240 - 0.9195i	0
	-0.5259 - 0.3821i	-0.7229	0
	0.3464 + 0.1856i	-0.5273 + 0.3878i	0
	0.3464 - 0.1856i	-0.5273 - 0.3878i	0
	0.0187 + 0.0982i	0.0187 + 0.0982i	0
	0.0187 - 0.0982i	0.0187 - 0.0982i	0
	-0.0305	-0.0305	0

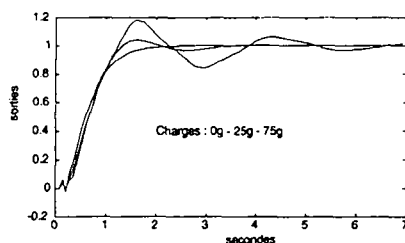


Fig. 3.19 : Réponses indicielles du système robustifié
(perturbation constante à partir de $t=10[s]$)

La réponse est d'autant moins amortie que la charge est plus élevée. La figure 3.20 montre sa capacité à compenser une perturbation constante en sortie dans le cas le plus défavorable (charge de 75 grammes).

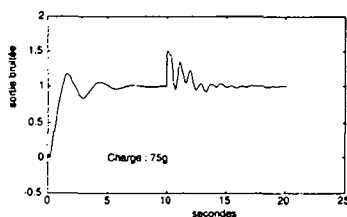


Fig. 3.20 : Réponses indicielles perturbée du système robustifié (perturbation constante à partir de $t = 10[s]$)

Itérations axées sur $Q(z)$ et $A_{obs}(z)$:

La robustesse est obtenue plus rapidement; ce qui corrobore notre thèse (cf. § 3.2.3-A) que plus A_{obs} est lent, plus le système est robuste. Les réponses indicielles correspondantes sont reportées sur la figure 3.21. Nous avons comme valeurs initiales de synthèse :

$A_m = [1 \ -0.75] * [1 \ -0.80]$; $A_{obs} = [1 \ -0.88]$;

Le régulateur est d'ordre moins élevé ($degR = 8$) que le précédent:

$R = [1, -1.1656, -0.1189, 0.1937, -0.3152, 0.3922, 0.1785, -0.2203, 0.0556]$;

$S = [-0.3571, 1.8658, -1.4902, -0.6944, 0.0367, -0.2125, 1.1031, 0.6258, -0.8687]$;

$T = [0.0085, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$;

Les réponses indicielles (figure 3.21) montrent que le système réglé est plus amorti comparé au système précédent.

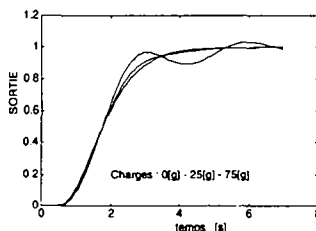


Fig. 3.21 : Réponses indicielles du système robustifié

3.5 CONCLUSION

Les concepteurs de réglage robuste font appel à une procédure de recherche basée sur de la simulation itérative, cf. Morari & Zafiriou (1989), Tsytkin (1991), et Gawthrop *et al.* (1993). Dans notre cas, le polynôme observateur A_{obs} est un polynôme «d'augmentation» qui procure un degré de liberté supplémentaire lors de la synthèse. Les études de synthèse que nous avons présentées sont résolues par itération. La méthode présentée à la section 3.2.3 se prête à la résolution d'un problème de robustesse avec un cahier des charges très précis : modèle nominal donné et modèle d'incertitude précis. Par contre, l'exemple du bras souple essaie de résoudre les trois modèles possibles du système incertain sans modéliser explicitement l'incertitude. Jusqu'à maintenant, ce sont les deux seules manières de définir un problème de robustesse. Manifestement, on obtient dans les deux cas un réglage réellement robuste.

REFERENCES

- Aïoun F., Bourlès H., Irving E. (1993), « *Robust Control of Flexible Structures : an H_∞ Approach to Achieve Optimal Performances* », ECC-93, pp. 738-744.
- Aström K. J. & Wittenmark B. (1984), « *Computer Controlled System - Teory and Design* », Prentice Hall.
- Bourlès H. & Aïoun F. (1993), « *Approche H_∞ et μ -synthèse* », recueil Ecole d'été d'automatique de Grenoble.
- Clarke D. & Mohtadi C. (1989), « *Properties of GPC* », Automatica, vol. 25, n°6, pp. 859-875.
- Doyle J. C., Glover K., Khargonekar P. P. and Francis B. A., (1989), « *State-space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems* », IEEE-TAC, AC-34, pp. 831-847.
- Johnson C. (1976), « *Theory of Disturbance Accommodating Controllers* », Advances in Control and Dynamic Systems, vol.12, Academic Press.
- Gawthrop P. J., Sbarbaro D., Jones R. W. (1993), « *Model-Based Control Structures* », preprints ECC-93.
- Goodwin G. & Sin K. (1984), « *Adaptive Filtering, Prediction And Control* », Prentice Hall.
- Kimura H. (1984), « *Robust Stability for Class of Transfert Functions* », IEEE-TAC, vol. AC-29, pp. 788-793.
- Landau I. D. (1993), « *Régulation Numérique Robuste - Placement des Pôles avec Calibrage de la Fonction de Sensibilité* », recueil Ecole d'été d'automatique de Grenoble.
- Morari M. & Zafiriou E. (1989), « *Robust Process Control* », Prentice-Hall.
- Schneider T. (1992), « *Implantation de Régulateurs Prédictifs* », travail de diplôme Institut d'Automatique - EPFL.
- Tsytkin Ya. Z. (1991), « *On Robust Adaptive Control Systems under Bounded Uncertainty* », 9th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Budapest.
- Tuncelli C. A (1992), « *Algorithmes Unifiés de Commande Polynomiale Auto-ajustable par Placement des Pôles* », thèse EPFL n° 1098.
- Vidyasagar M. (1993), « *Nonlinear Systems Analysis* », Prentice-Hall.
- Youla D. C., Bongiorno J. J. & Lu C. N. (1974), « *Single-loop Feedback Stabilization of Linear Multivariable Dynamical Plants* », Automatica, vol. 10, pp. 159-173.
- Zames G. (1981), « *Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses* », IEEE-TAC, vol. AC-26, pp. 301-320.

IDENTIFICATION ROBUSTE

INTRODUCTION

Le terme «robuste» appliqué à l'identification signifie que l'on va estimer le paramètre nominal ainsi que son incertitude. Nous admettons que le *paramètre du modèle nominal* $\theta_0(t)$ peut être variable mais que l'*incertitude* $\Delta\theta(t)$ ne comptabilise pas cette variation i.e. $\theta(t) = \theta_0(t) + \Delta\theta(t)$. Le concept très général d'*approximation stochastique* nous servira de cadre d'étude sous les formes particulières de *gradient stochastique* et de *Newton stochastique*. L'algorithme des moindres carrés récurrents (RLS) appartient à cette dernière catégorie. Pour améliorer cette méthode, nous utiliserons un facteur d'oubli conjointement avec une estimation de la matrice de covariance des paramètres qui servira à renforcer le gain d'adaptation du RLS. Cette matrice nous permettra également d'estimer l'*incertitude paramétrique*.

Tab. 4.1 : Méthodes d'identification robuste

	APPROXIMATION STOCHASTIQUE	IDENTIFICATION DE PARAMETRE NOMINAL VARIABLE	IDENTIFICATION D'INCERTITUDE PARAMETRIQUE
CADRES	Gradient stochastique	Newton stochastique	RLS
METHODES	LMS, NLMS	RLS et estimation de la matrice de covariance	Estimation de la matrice de covariance
RESULTATS	Poursuite de paramètres variables	Direction de recherche plus riche et meilleure poursuite	Estimation en ligne de l'incertitude paramétrique
CONTENU DU CHAPITRE	§4.1.1 Revue du gradient stochastique § 4.1.4 Exemples	§4.1.3 et 4.2.2 Cas particulier des moindres carrés récurrents Section 4.2 Renforcement de la capacité de poursuite du RLS à l'aide de la matrice de covariance estimée $Q(t)$.	§4.2.3 Estimation en ligne de la matrice de covariance $Q(t)$ §4.3.1 Calcul en ligne de l'incertitude paramétrique à partir de $Q(t)$

4.1 APPROXIMATION STOCHASTIQUE

RAPPEL :

Soit le modèle d'un système avec l'erreur de modélisation $v(t)$:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + v(t) \quad (4.1a)$$

L'identification permet d'obtenir le vecteur des paramètres $\theta(t)$ formé des coefficients des polynômes $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ sur la base de séquences d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ mesurées. Les données sont arrangées dans le régresseur $\phi(t)$. Ces deux vecteurs sont présentés comme suit :

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \phi(t) = \begin{bmatrix} -y(t-1) \\ \dots \\ -y(t-n) \\ u(t-d-1) \\ \dots \\ u(t-d-m) \end{bmatrix} \quad (4.1b)$$

L'approximation stochastique est utilisée en statistique pour traiter des problèmes séquentiels d'estimation de paramètres. C'est une notion très générale que nous utiliserons comme cadre pour l'identification de paramètres variables. Après une introduction du concept, nous nous intéresserons (Sec. 4.1.1) à l'algorithme du gradient stochastique. Comme la direction de recherche de ce dernier est parallèle au régresseur $\phi(t)$, il est impossible d'avoir une estimation des paramètres qui sont $\theta(t)$ perpendiculaires à $\phi(t)$. Pour surmonter cette difficulté, nous traiterons l'algorithme du Newton stochastique (Sec. 4.1.2). Nous démontrerons (Sec. 4.2.2) que la méthode des moindres carrés récurrents (RLS) est un cas particulier de cette dernière famille. Dans les deux dernières sections, nous suggérerons une nouvelle méthode (4.3.1 et 4.3.2) pour améliorer la capacité de poursuite du RLS en renforçant la matrice de gain d'adaptation $P(t)$ à l'aide de la matrice de covariance $Q(t)$. A partir de cette matrice estimée en ligne, nous proposons (Sec. 4.3.3) une méthode originale de calcul des incertitudes paramétriques.

Problème :

Sur la base de la *mesure* composée de la *sortie* $y(t)$ et du *régresseur* $\phi(t)$,

$$x = \begin{pmatrix} y(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

déterminer le *paramètre* inconnu $\theta(t)$ défini par le modèle suivant

$$y(t) = \phi^T(t) \theta(t) + v(t) \quad (4.3)$$

Solution : (proposition de Robbins - Monro)

Soit $H(\theta, x)$ une fonction qui vérifie l'équation

$$\mathcal{E}\{H(\theta, x)\} = 0 \quad (4.4)$$

\mathcal{E} dénote l'espérance mathématique de H par rapport à la variable aléatoire x . La distribution de θ n'est pas connue, ni la forme exacte de H qui sera «construite» en se basant sur x . Dans notre cas, il est naturel de chercher à minimiser la variance de $v(t)$ du modèle (4.3).

$$\text{Si } \mathcal{J}(\theta) = \frac{1}{2} \mathcal{E}\{v^2(t)\} \quad \text{alors on cherche } \min_{\theta} \mathcal{J}(\theta) \quad (4.5)$$

$$\text{i.e. } \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{J}(\theta) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}\{\phi(t)[y(t) - \phi^T(t)\theta]\} = 0 \quad (4.6)$$

La condition supplémentaire pour que cette dérivée corresponde à un minimum est que la seconde dérivée de $\mathcal{J}(\theta)$ soit non négative i.e. $\mathcal{E}\{[\phi(t)\phi^T(t)]\} \geq 0$ (4.7)

L'équation (4.6) nous suggère une expression de H

$$H(\theta, x) = \phi(t)[y(t) - \phi^T(t)\theta] \quad (4.8)$$

Le travail d'estimation s'échelonne comme suit :

- déterminer une séquence de valeurs $x(t)$, $t = 0, 1, \dots$,
- observer la **direction de recherche**, $H(\phi, x)$, correspondante,
- inférer la solution selon l'équation (4.4).

On procède empiriquement de la manière suivante :

- fixer une valeur de θ ,
- observer un grand nombre de $H(\theta, x)$ pour cette valeur de θ afin d'obtenir une bonne estimation de $H(\theta, x)$ d'après (4.4),
- répéter la procédure, avec d'autres valeurs de θ jusqu'à ce que la solution soit trouvée.

Robbins et Monro (1951) ont proposé l'approximation récursive de la solution de ce problème d'après :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \gamma(t)H(\hat{\theta}(t-1), x) \quad (4.9)$$

$\gamma(t)$, le **gain scalaire**, est une suite de nombres positifs qui doivent rester "petits", ou même tendre vers zéro.

4.1.1 Gradient stochastique

Soit l'erreur de prédiction $\varepsilon(t)$, appelée aussi **résidu**.

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \phi^T(t)\theta \quad (4.10)$$

Il est naturel de vouloir estimer le paramètre θ qui minimise la variance du résidu :

$$\mathcal{J}(\theta) = \frac{1}{2} \mathcal{E}\{\varepsilon^2(t, \theta)\} \quad (4.11)$$

$$\bullet \mathcal{E}\{H(\theta, x)\} = -\text{grad } \mathcal{J}(\theta) \Rightarrow H = \phi(t)\varepsilon(t) \quad (4.12)$$

$$\bullet \gamma(t) = \gamma_0 \quad \text{une constante} \quad (4.13)$$

Le signe moins indique que l'on «descend» vers le minimum indiqué par le gradient.

Le gradient stochastique est équivalent au choix d'une direction de recherche parallèle au régresseur $\phi(t)$.

A. LMS

Le gradient stochastique est connu sous la dénomination de **LMS** (Least Mean Square)

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \gamma_0 \phi(t) \left[y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1) \right] \quad (4.14)$$

Remarque 4.1 Le *gain scalaire* γ_0 est le seul paramètre ajustable de cet algorithme. Il joue un triple rôle :

- comme facteur de convergence de l'algorithme si les signaux sont bien conditionnés,
- pour la stabilité de l'algorithme afin d'éviter une dérive cumulative de cette série,
- moyen de contrôle du taux d'adaptation qui ne devrait pas faiblir pour les longues séries non stationnaires.

Pour mieux orienter le choix de γ_0 , intéressons nous à la convergence de cet algorithme.

Théorème 4.1 (convergence du LMS) *La condition nécessaire et suffisante pour que l'algorithme LMS converge est*

$$0 < \gamma_0 \lambda_{\max}\{S(t)\} < 2 \quad (4.15)$$

où $\lambda_{\max}\{S(t)\}$ dénote la valeur propre maximale S

$$\text{et } S(t) = \mathcal{E}\{\phi(t)\phi^T(t)\} \quad (4.16)$$

♦ ♦ ♦

Démonstration :

On définit l'erreur d'estimation à partir de la valeur inconnue du vrai paramètre et celle de l'estimée

$$\Delta\theta(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t) \quad (4.17)$$

D'autre part, on peut définir la dynamique de l'erreur selon Johnson (1988)

$$\Delta\theta(t) = [I - \gamma_0 S(t)] \Delta\theta(t-1) \quad (4.18)$$

Après une décomposition modale,

$$\Lambda = Q^T S Q = \text{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_{n+m}\} \quad (4.19)$$

on déduit la condition nécessaire et suffisante de convergence exponentielle de la suite géométrique (4.18)

$$0 < \gamma_0 \lambda_{\max}\{S(t)\} < 2 \quad \dots$$

Remarque 4.2

- On peut définir des constantes de temps associées à la poursuite des $\Delta\theta_i(t)$

$$\tau_i = \frac{1}{\gamma_0 \lambda_i} \quad (4.20)$$

qui sont déterminantes pour la vitesse de convergence.

- En pratique, on se sert d'une condition suffisante plus accessible qui utilise la trace

$$0 < \gamma_0 \operatorname{tr}\{S(t)\} < 2 \quad (4.21)$$
La trace majeure λ_{\max} car $S(t)$ est définie non-négative; cette dernière condition est donc plus restrictive que (4.15) sur la valeur de γ_0 .
- Le choix de la valeur de γ_0 est tout à fait libre. On s'arrange pour qu'elle ne tende pas vers zéro. Ainsi, la capacité de poursuite est préservée quelle que soit la durée de l'identification.
- Les valeurs estimées dépendent de l'amplitude de $y(t)$, donc de $\phi(t)$. Il n'est pas possible d'utiliser cet algorithme si les signaux ne sont pas normalisés.

B. NLMS

Le NLMS (Normalized Least Mean Square) répond à la normalisation des signaux en les divisant par le terme $\phi^T(t)\phi(t)$. On ajoute un coefficient $\alpha > 0$ au dénominateur en prévision du cas où le **terme de normalisation** $\phi^T(t)\phi(t)$ s'annulerait.

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\gamma_0}{\alpha + \phi^T(t)\phi(t)} \phi(t) [y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)] \quad (4.22)$$

Cet algorithme s'écrit aussi sous la forme

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \pi(t)\phi(t) \quad \text{où} \quad \pi(t) = \frac{\gamma_0}{\alpha + \phi^T(t)\phi(t)} [y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)] \quad (4.23)$$

Remarque 4.3

- Pour satisfaire aux conditions de convergence, le choix de la valeur de γ_0 est plus simple que pour le LMS.

$$0 < \gamma_0 < 2 \quad (4.24)$$
- A cause de la valeur de γ_0 constante, cette méthode possède des aptitudes, indépendamment du temps, à suivre les variations paramétriques. Cependant, d'après (4.23), les paramètres de direction perpendiculaire à celle de $\phi(t)$ ne pourront pas être identifiés.
- Widrow *et al.* (1976) ont montré que les paramètres identifiés ont un faible biais dû à deux phénomènes antagonistes :
 - a) un "bruit du gradient" proportionnel à γ_0 .
 - b) les constantes de temps (4.20), inversement proportionnelles à γ_0 .

Le meilleur compromis, qui aboutit à un biais minimum, correspond au choix d'un λ_{optimal} qui n'est pas trivial à déterminer.

4.1.2 NLMS améliorés

La conception de l'estimateur — choix de γ_0 ou de $\pi(t)$ — adaptée à une situation déterminée nécessite quelques précautions. Pour tenir compte de la poursuite paramétrique et du filtrage des bruits de mesure, nous proposons deux nouveaux schémas améliorés. On peut les interpréter comme des algorithmes, basés sur le même NLMS, mais utilisant des fenêtres d'observation différentes suivant la manière de construire le terme de projection $\pi(t)$.

1. FGC (Fenêtre Glissante Constante)

Le choix **FGC** correspond à l'utilisation d'un NLMS avec $\alpha = 1$. Il servira de base de comparaison par rapport à nos deux nouvelles propositions.

$$\pi(t) = \frac{\gamma_0}{1 + \phi^T(t)\phi(t)} \varepsilon(t) \quad (4.25)$$

2. FID (Fenêtre Intégrale Décroissante)

Pour le cas de mesure bruitée, on effectue un filtrage en diminuant petit à petit le gain d'adaptation par "accumulation" de $\phi^T(t)\phi(t)$ au dénominateur de la manière suivante :

à l'instant $t = t_d$:

$$\phi^T(1)\phi(1) = \phi^T(t)\phi(t)$$

à l'instant $t+1$:

$$\phi^T(2)\phi(2) = \phi^T(t+1)\phi(t+1) + \phi^T(1)\phi(1)$$

.....

à l'instant $t+k$:

$$\phi^T(k)\phi(k) = \phi^T(t+k)\phi(t+k) + \phi^T(k-1)\phi(k-1)$$

etc. ... jusqu'à $t = t_f$.

Pour conserver une capacité de poursuite effective, il est nécessaire de réactualiser la fenêtre d'observation $[t_d \dots t_f]$ en réinitialisant la sommation à l'instant t_f .

$$\pi(t) = \frac{\gamma_0}{1 + \sum_{i=t_d}^{t_f} \phi^T(i)\phi(i)} \varepsilon(t) \quad (4.26)$$

3. FGD (Fenêtre Glissante Décroissante)

Une autre variante est proposée en cas de mesure entachée de bruit. On utilise un taux de projection ayant une pondération inversement proportionnelle à l'instant d'échantillonnage. On doit rafraîchir le gain en réinitialisant la valeur de t à 1 de façon cyclique.

$$\pi(t) = \frac{1}{t} \frac{\gamma_0}{1 + \phi^T(t)\phi(t)} \varepsilon(t) \quad (4.27)$$

Remarque 4.4 Signalons qu'un algorithme dont le gain d'adaptation est en constante diminution n'est pas efficace pour suivre des variations paramétriques. Pour les deux dernières méthodes proposées (FID et FGD), on a adopté une réactualisation des gains d'adaptation à des instants adéquats. Malheureusement, on ne dispose d'aucune indication qui permettrait d'effectuer correctement cette procédure.

Quelques cas sont étudiés (Sec. 4.1.4) pour illustrer les méthodes que nous venons de présenter. Signalons que l'algorithme LMS sera écarté de notre étude. Cet algorithme, bien que très prisé en traitement du signal, s'avère d'un maniement peu commode. En effet, les estimées sont directement proportionnelles au vecteur de mesure $\phi(t)$. Cela signifie en pratique qu'un changement de consigne entraîne un changement concomitant des paramètres identifiés alors que le processus générateur demeure le même. La normalisation des estimées est incontournable.

4.1.3 Newton stochastique et RLS

Cette dénomination provient de l'homologie de cet algorithme avec la formule d'approximation de Newton-Raphson. Par rapport au gradient stochastique, on introduit le terme supplémentaire $\hat{S}^{-1}(t)$ qui améliorera la direction de recherche des nouveaux paramètres et conjointement assurera la normalisation des valeurs estimées. L'estimation de $\hat{S}(t)$ et l'inversion matricielle constituent une charge de calcul supplémentaire par rapport au NLMS.

A. Forme générale

Soit $\mathcal{J}(\theta) = \frac{1}{2} \mathcal{E}\{\varepsilon^2(t, \theta)\}$ (4.28)

On définit le schéma du Newton stochastique par l'équation générique :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \gamma(t) \left(\frac{\partial^2 \mathcal{J}(\theta)}{\partial \theta^2} \right)^{-1} \bigg|_{\hat{\theta}} H(\hat{\theta}(t-1), x) \quad (4.29)$$

A l'aide de (4.28), on définit

$$\bullet \mathcal{E}\{H(\hat{\theta}, x)\} = -\text{grad } \mathcal{J}(\hat{\theta}) \Rightarrow H = \phi(t)[y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1)] \quad (4.30a)$$

$$\bullet \frac{\partial^2 \mathcal{J}(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}^2} = S = \mathcal{E}\{\phi(t)\phi^T(t)\} \quad (4.30b)$$

la covariance S , qui est une moyenne stochastique, peut être estimée par approximation stochastique :

$$\hat{S}(t) = \hat{S}(t-1) + 1/t[\phi(t)\phi^T(t) - \hat{S}(t-1)]$$

d'où la forme complète de l'algorithme

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \gamma_1(t) \hat{S}^{-1}(t)\phi(t)[y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1)] \quad (4.31a)$$

$$\hat{S}(t) = \hat{S}(t-1) + \gamma_2(t)[\phi(t)\phi^T(t) - \hat{S}(t-1)] \quad (4.31b)$$

B. Moindres carrés récurrents revisités

Nous allons montrer que RLS est une méthode inadéquate à l'identification de paramètres variables car son gain d'adaptation contient un terme inversement proportionnel à t . Notre démarche inédite va utiliser la formulation d'un algorithme de Newton stochastique équivalent.

Théorème 4.2 (RLS) L'algorithme RLS

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + L(t) [y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1)] \quad (4.32a)$$

$$L(t) = P(t)\phi(t) = \frac{P(t-1)\phi(t)}{1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} \quad (4.32b)$$

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)}{1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} \quad (4.32c)$$

correspond à un algorithme de Newton stochastique avec le choix particulier (cf. éq. 4.31)

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = \frac{1}{t} \quad (4.33)$$

♦ ♦ ♦

Démonstration :

RLS résulte de la minimisation de $J(\theta) = \frac{1}{2} \mathcal{E}\{\epsilon^2(t, \theta)\}$

La solution est une équation dite de Wiener, cf. Widrow (1984)

$$\hat{\theta}(t) = [\mathcal{E}\{\phi(t)\phi^T(t)\}]^{-1} \mathcal{E}\{\phi(t)y(t)\} \quad (4.34)$$

Pour évaluer les moyennes, qui sont toutes des fonctions du temps, posons

$$\hat{S}(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i)\phi^T(i) \quad (4.35)$$

Formons $\sum_{i=1}^t \phi(i)\phi^T(i)$ d'après la relaxation suivante

$$t \hat{S}(t) = [t-1] \hat{S}(t-1) + \phi(t) \phi^T(t) \quad (4.36)$$

On obtient une estimation de la moyenne de $\hat{S}(t)$ qui correspond à (4.31b) pour $\gamma_2(t) = \frac{1}{t}$

$$\hat{S}(t) = \hat{S}(t-1) + \frac{1}{t} [\phi(t) \phi^T(t) - \hat{S}(t-1)] \quad (4.37)$$

Multiplions (4.36) par $\theta(t)$, respectivement $\theta(t-1)$, selon les dates effectives des échantillons

$$t \hat{S}(t) \hat{\theta}(t) = [t-1] \hat{S}(t-1) \hat{\theta}(t-1) + \phi^T(t) \hat{\theta}(t)$$

De (4.36), on tire l'expression de $[t-1] \hat{S}(t-1)$ au deuxième membre que l'on introduit dans l'équation précédente :

$$t \hat{S}(t) \hat{\theta}(t) = [t \hat{S}(t) - \phi(t) \phi^T(t)] \hat{\theta}(t-1) + \phi^T(t) \hat{\theta}(t)$$

Multiplions les deux membres par $\frac{1}{t} \hat{S}^{-1}(t)$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{1}{t} \hat{S}^{-1}(t) \phi(t) [\phi^T(t) \hat{\theta}(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1)] \quad (4.38)$$

Considérons $\phi^T(t) \hat{\theta}(t)$ dans le deuxième membre de l'égalité (4.38) comme l'équivalent strict de la sortie $y(t) \Rightarrow \phi^T(t) \hat{\theta}(t) = y(t)$

Par conséquent,

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{1}{t} \hat{S}^{-1}(t) \phi(t) [y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1)] \quad (4.39)$$

On obtient exactement l'équation (4.31a) pour $\gamma_l(t) = \frac{1}{t}$.

Posons

$$P(t) = \frac{1}{t} \hat{S}^{-1}(t) \quad (4.40)$$

et en appliquant le *lemme d'inversion matricielle* à (4.36)

$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1}$	(4.41)
--	--------

avec $A = [t - 1] \hat{S}(t-1)$

$B = \phi(t)$

$C = 1$

$D = \phi^T(t)$

on obtient l'équation (4.32c) de mise à jour de la **matrice de gain** $P(t)$. L'équation (4.32a) de mise à jour du paramètre s'exprime par le **gain d'adaptation**

$$L(t) = P(t) \phi(t) \quad (4.42)$$

une fonction de $P(t)$ alors que (4.32b) est une fonction de $P(t-1)$. Montrons que ces deux expressions sont équivalentes.

L'équation (4.36) peut être mise sous la forme suivante :

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(t-1) + \phi(t) \phi^T(t) \quad (4.43)$$

Multiplions le gain d'adaptation (4.32b) par la matrice unité

$$I(t) = P(t)P^{-1}(t)$$

$$\Rightarrow L(t) = P(t)P^{-1}(t) \frac{P(t-1)\phi(t)}{1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)}$$

En y substituant (4.43)

$$\begin{aligned} L(t) &= P(t)[P^{-1}(t-1) + \phi(t) \phi^T(t)] \frac{P(t-1)\phi(t)}{1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} \\ &= P(t) \phi(t)[1 + \phi^T(t)P(t-1) \phi(t)] \frac{1}{1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} \\ &= P(t) \phi(t) \end{aligned}$$

...

Remarque 4.5 Les caractéristiques du RLS ont été abondamment étudiées par différents auteurs *e.g.* Goodwin et Sin (1984) ou Ljung et Söderström (1983). Il est bien connu que cette méthode travaille parfaitement pour un processus à paramètres fixes. Elle doit être modifiée dès que les paramètres sont variables à cause du terme $1/t$ dans l'expression du gain.

4.1.4 Illustrations du gradient stochastique

Nous présenterons quatre modèles de processus à identifier. On peut simuler un bruit aléatoire gaussien, centré et réduit; le coefficient d permet d'ajuster le rapport signal sur bruit.

a) **MODELE_a** : Paramètres constants

$$P(q^{-1}) = \frac{-0.6q^{-1}}{1 + 0.8q^{-1}} \Rightarrow \theta(t) = [0.8 \ 0.6]^T \quad (4.44)$$

on ajuste l'amplitude du bruit br à l'aide de d : $br = \frac{1}{1 - 0.8q^{-1}} d$

b) **MODELE_b** : Paramètres à variation discrète

Toutes les 50 itérations, le modèle à identifier commute de P_1 à P_2 et vice versa.

$$P_1(q^{-1}) = \frac{-0.6q^{-1}}{1 + 0.8q^{-1}} \Rightarrow \theta_1(t) = [0.8 \ 0.6]^T \quad (4.45)$$

$$P_2(q^{-1}) = \frac{-0.3q^{-1}}{1 + 0.5q^{-1}} \Rightarrow \theta_2(t) = [0.5 \ 0.3]^T \quad (4.46)$$

c) **MODELE_c** : Paramètres à dérive linéaire et continue passant de P_1 à P_2 et vice versa.

d) **MODELE_d** : Paramètres à variation sinusoidale de période égale à 100 itérations, ayant pour valeurs extrêmes celles de P_1 et P_2 .

Dans tous les cas, le vecteur paramètre et le régresseur sont initialisés à zéro.

A. Aspect général

Effets du choix de γ :

Nous allons successivement tester chaque type de gain mentionné dans § 4.1.2. Quelques valeurs simulées permettront de déterminer le choix convenable du gain scalaire γ_0 . Nous nous intéressons pour commencer aux conditions de convergence du NLMS (eq. 4.24) à l'aide du **MODELE_a** (eq. 4.44). Nous vérifierons (fig. 4.1) que chaque algorithme diverge avec :

a) un gain $\gamma_0 > 2$

b) ensuite $\gamma_0 < 0$.

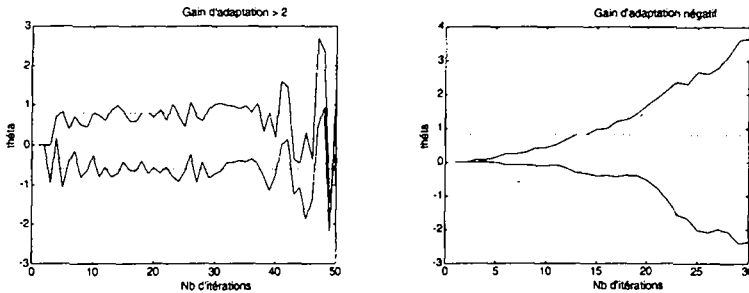


Fig. 4.1 : Test de convergence en fonction de γ_0

Dans le tableau 4.1, nous rappelons les types de gains que nous allons tester. Le premier choix de γ_0 permet de comparer le comportement de ces algorithmes. Le deuxième choix est le résultat d'une recherche par approches successives qui a fourni des valeurs *a posteriori* de "bons" gains.

Tab. 4.1 : Choix de différentes valeurs de γ_0

	Fenêtre Glissante Constante	Fenêtre Intégrale Décroissante	Fenêtre Glissante Décroissante
Formes du gain	$\gamma(t)_{\text{FGC}} = \frac{\gamma_0}{1 + \phi^T(t)\phi(t)}$	$\gamma(t)_{\text{FID}} = \frac{\gamma_0}{1 + \sum_{i=t_d}^t \phi^T(i)\phi(i)}$	$\gamma(t)_{\text{FGD}} = \frac{1}{t} \frac{\gamma_0}{1 + \phi^T(t)\phi(t)}$
1er choix de valeurs de γ_0	0,1	0,1	0,1
2ème choix de valeurs de γ_0	1,5	$n*1,5$ n : ordre du système	$2n*1,5$

La première simulation est faite avec un processus constant (MODELE_a) . Nous appliquons le 1er choix de γ_0 . Les résultats sont montrés sur la figure 4.2.

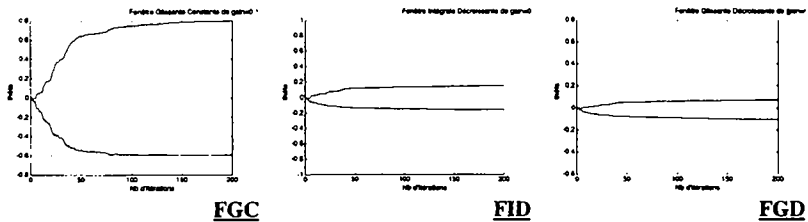


Fig. 4.2 : Identification d'un processus constant - 1er choix de γ_0

La deuxième simulation est effectuée avec le même processus constant, MODELE_a. Nous avons procédé à des recherches libres des gains qui donnent de bons comportements.

Commentaires 4.1

- Pour les options FID et FGD, la figure 4.2 montre une convergence lente voire un biais de l'estimateur dues aux valeurs décroissantes des gains $\gamma(t)$.
- Les meilleures valeurs sont inscrites dans le tableau à la ligne 2ème choix de γ_0 . La figure 4.3 illustre le comportement de chaque algorithme; une comparaison avec la figure 4.2 montre bien que $\gamma(t)$ est inversement proportionnelle à la constante de temps associée (éq. 4.20).

- Les gains empiriques suivant la ligne « 2ème choix de γ_0 » du tableau 4.1 peuvent être ajustés d'après (4.21) si on pouvait accéder à la matrice de covariance de la mesure. Nous conseillons d'adopter, pour le choix du gain γ_0 , la règle énoncée en (4.24) i.e.

$$0 < \gamma_0 < 2$$

Néanmoins, pour les méthodes FID et FGD, il est nécessaire de réinitialiser les valeurs de ces gains à intervalles fixes.



Fig. 4.3 : Identification d'un processus constant - 2ème choix de γ_0

Mesure bruitée :

On va tester maintenant le comportement des trois variantes du NLMS en présence d'un bruit de mesure (fig. 4.4). Nous l'avons choisi gaussien, centré et à variance unitaire.

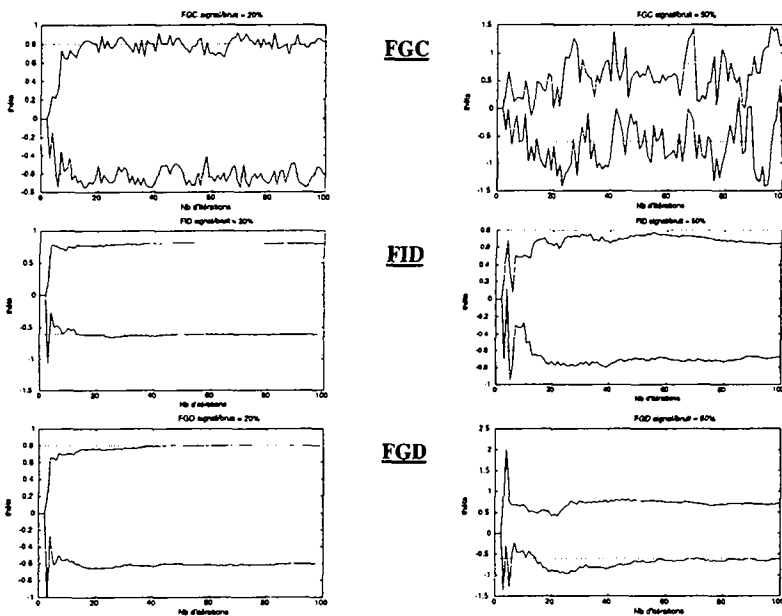


Fig. 4.4 : NLMS en présence de bruits de mesure

Les algorithmes à gain décroissant (FID et FGD) atténuent l'incidence du bruit sur les estimées comme le montre la figure 4.4. Il faudrait filtrer au préalable les spectres inutiles des données de mesure avant de procéder à l'identification sinon la présence accrue de perturbations donnera des valeurs de paramètres identifiés de moins en moins significatives.

B. Processus à paramètres variables

On utilise à tour de rôle les trois modèles (4.44) à (4.46). On peut remarquer (Fig. 4.5) que :

- l'algorithme du type FGC possède une excellente aptitude à identifier des paramètres variables. Ce comportement s'explique par la forme de la fonction coût (4.24);
- par contre les deux algorithmes « à mémoire » (FID et FGD) se prêtent mal à l'identification de paramètres variables malgré une réinitialisation de leur gain scalaire toutes les 100 itérations. En diminuant cette période de rafraîchissement, on peut améliorer (le meilleur des cas pour FGC) leur comportement vis-à-vis des variations paramétriques.

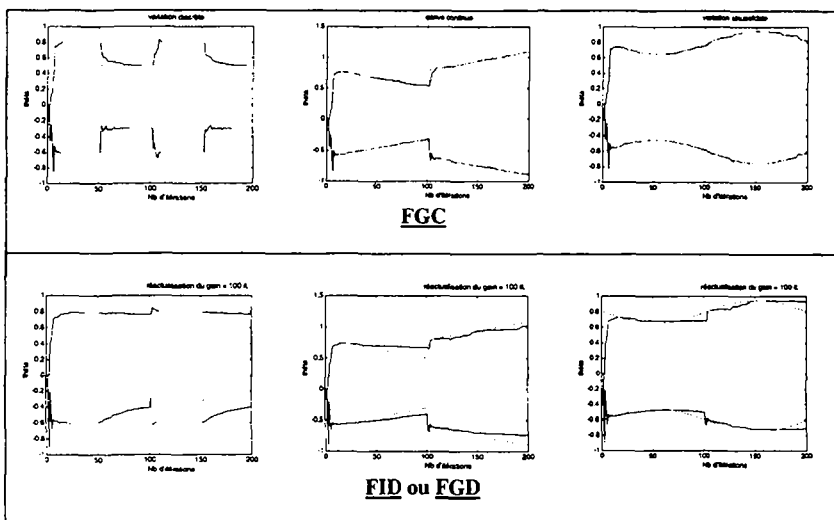


Fig. 4.5 : NLMS identifiant des paramètres variables

C. Conclusions sur la méthode du gradient stochastique

Dans le cadre du traitement du signal, des études mathématiques intensives sur cette famille d'estimateur ont été publiées ces vingt dernières années notamment par l'équipe de B. Widrow. En automatique, seule l'équipe russe de Tsytkin l'a vraiment exploitée d'une manière systématique. Un défaut de convergence a été injustement imputé à cette méthode et n'a pas doré sa réputation. En outre, la séquence de gain $\gamma(t)$ est librement choisie par l'utilisateur, contrairement au gain du RLS qui s'auto-ajuste confortablement; mais une fois ce choix maîtrisé, on dispose d'un bon algorithme d'identification à vitesse de convergence, certes moins rapide que celle de RLS, mais en tout cas assurée.

Sa supériorité par rapport au RLS est patente si les paramètres identifiés varient. Benveniste *et al.* (1987), s'appuyant sur des démonstrations rigoureuses, ont montré qu'un simple LMS est l'algorithme optimal en situation de poursuite. Ces mêmes auteurs recommandent RLS avec un facteur d'oubli exponentiel pour la phase transitoire sauf que le gradient stochastique lui est préféré ensuite pour les longues phases non stationnaires. Suivant le type de bruits de mesure, l'utilisation d'une fenêtre d'observation appropriée est nécessaire pour la poursuite des paramètres variables et pour filtrer conjointement ces bruits. Il faut définir une heuristique appropriée pour faire varier ces fenêtres.

4.2 IDENTIFICATION DE PARAMETRES VARIABLES

Nous nous proposons de construire un estimateur dont le gain scalaire d'adaptation $\gamma(t)$ ne tende pas vers zéro à mesure que le temps s'écoule. D'abord, nous montrerons (Sec. 4.2.2) que le facteur d'oubli doté le RLS d'un gain asymptotiquement non nul. Ensuite (Sec. 4.3.2), nous renforcerons la matrice de gain $P(t)$ en lui ajoutant la covariance $Q(t) = E\Delta\theta(t)\Delta\theta^T(t)$. Notre contribution originale réside en l'estimation en ligne de $Q(t)$ (Sec. 4.3.1).

4.2.1 Schéma cadre : Best Linear Unbiased Estimation (BLUE)

Pour traiter le cas spécifique du paramètre variable, une possibilité consiste à reformuler la modélisation du paramètre variable sous forme de "promenade aléatoire" (random walk).

$$\theta(t) = \theta(t-1) + w(t) \quad (4.47a)$$

$$y(t) = \phi^T(t) \theta(t) + e(t) \quad (4.47b)$$

En adoptant les hypothèses suivantes :

$$a) \{w(t)\} \equiv \text{séquence de bruit blanc Gaussien, centré et de variance } Q \quad (4.48a)$$

$$Ew(t) = 0 \quad (4.50b)$$

$$Ew(t)w^T(t) = Q \quad (4.50c)$$

$$b) Ee(t)e^T(t) = R$$

D'après Anderson et Moore (1979), la meilleure estimation (BLUE) de $\theta(t)$ est un **filtre de Kalman** ayant pour algorithme

Mise à jour des mesures : (correction)

$$\hat{\theta}(t|t) = \hat{\theta}(t|t-1) + P(t|t)\phi(t) [y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t|t-1)] \quad (4.51a)$$

$$P(t|t) = P(t|t-1) - P(t|t-1)\phi(t) [R + \phi^T(t)P(t|t-1)\phi(t)]^{-1} \phi^T(t)P(t|t-1) \quad (4.51b)$$

Mise à jour temporelle : (prédiction)

$$\hat{\theta}(t+1|t) = \hat{\theta}(t|t) \quad (4.51c)$$

$$P(t+1|t) = P(t|t) + Q \quad (4.51d)$$

Remarque 4.6

- Malheureusement, les hypothèses (4.48) ne sont pas satisfaites en pratique. Plusieurs solutions ont été proposées pour les approcher. Pour les variations lentes, on utilise la technique des facteurs d'oubli tandis que les variations rapides font appel à la théorie de détection.
- En additionnant Q à $P(t)$, on évite que cette dernière converge vers zéro; ce qui dote cet algorithme d'une capacité de poursuite. Si $Q = 0$, le filtre de Kalman est identique au RLS.
- Signalons la présence de R dans l'équation (4.49b). Dans le cas de l'identification, ce terme est scalaire. Notre contribution pour améliorer l'estimation de paramètres variables consistera à estimer en ligne R et Q et à les incorporer dans l'algorithme RLS classique.

4.2.2 Moindres carrés revisités

En utilisant un facteur d'oubli, le terme $1/t$ (cf. théorème 4.2) disparaît du gain d'adaptation du RLS. Asymptotiquement, $1/t$ est remplacé par $(1 - \lambda)$. Nous allons donner une démonstration originale de cette proposition.

Théorème 4.3 (RLS - λ) Soit un entier N grand; l'algorithme RLS avec facteur d'oubli λ

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + L(t) [y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1)] \quad (4.50a)$$

$$L(t) = \frac{P(t-1)\phi(t)}{\lambda + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} \quad (4.50b)$$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda} \left(P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)}{\lambda + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} \right) \quad (4.50c)$$

correspond à un algorithme Newton stochastique ayant des gains scalaires asymptotiques $\gamma_1(t \rightarrow N)$ et $\gamma_2(t \rightarrow N)$ non nuls

$$\gamma_\infty = \gamma_1(t \rightarrow N) = \gamma_2(t \rightarrow N) = 1 - \lambda \quad (4.51)$$

♦ ♦ ♦

Démonstration :

On définit le facteur d'oubli λ à l'aide de la fonction coût (cf. Ljung & Söderström, 1983)

$$\mathcal{J}(\theta) = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} e^2(i, \theta) \quad (4.52)$$

on note
$$\beta(t, i) = \prod_{j=i+1}^t \lambda^{t-j} \quad (4.53)$$

Mise à jour de $\hat{\theta}(t)$

Pour t suffisamment grand i.e. $t > N$, $\gamma_1(t) \rightarrow \gamma_\infty$

Nous avons d'après (4.31a)

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \gamma_\infty \hat{S}^{-1}(t) \phi(t) [y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1)] \quad (4.54)$$

A partir de l'équation (4.50), on peut identifier

$$\begin{aligned} \gamma_\infty &= \left(\sum_{i=1}^N \beta(t, i) \right)^{-1} \\ &= (\lambda^N + \dots + \lambda^2 + \lambda^2 + \lambda + 1)^{-1} \\ &\approx 1 - \lambda \end{aligned} \quad (4.55)$$

Mise à jour de $P(t)$

Par définition pour t suffisamment grand

$$P^{-1}(t) = \frac{1}{\gamma_\infty} \hat{S}^{-1}(t) = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \phi(i) \phi^T(i) \quad (4.56)$$

Si on utilisait le gain scalaire asymptotique dès le départ, cette équation donnerait la récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
 t = 1 \quad & \frac{1}{\gamma_{\infty}} \hat{S}(1) = \phi(1)\phi^T(1) \\
 t = 2 \quad & \frac{1}{\gamma_{\infty}} \hat{S}(2) = \lambda\phi(1)\phi^T(1) + \phi(2)\phi^T(2) = \frac{\lambda}{\gamma_{\infty}} \hat{S}(1) + \phi(2)\phi^T(2) \\
 & \dots \dots \dots \\
 t = N \quad & \frac{1}{\gamma_{\infty}} \hat{S}(t) = \frac{\lambda}{\gamma_{\infty}} \hat{S}(t-1) + \phi(t)\phi^T(t) \quad (4.57) \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

En choisissant

$$\lambda = 1 - \gamma_{\infty} \quad (4.58)$$

et en portant cette valeur dans (4.57), nous obtenons la mise à jour de $\hat{S}(t)$

$$\hat{S}(t) = \hat{S}(t-1) + \gamma_{\infty} [\phi(t)\phi^T(t) - \hat{S}(t-1)] \quad (4.59)$$

On remarque d'après (4.58) que, contrairement au théorème 4.2, le gain scalaire ne converge pas vers zéro car

$$\gamma_{\infty} = 1 - \lambda \quad (4.60)$$

...

Remarque 4.7

- En pratique, on choisit comme facteur d'oubli

$$\lambda = 0,95 \dots 1,0$$

Par conséquent, le gain d'adaptation asymptotique reste "petit". Cet algorithme n'est capable de suivre que des paramètres variant faiblement. Il existe un compromis entre la vitesse de poursuite de variations paramétriques et l'effet des bruits. Plus λ est petit, plus la capacité de poursuite est grande, mais plus néfaste sera l'effet des bruits de mesure sur les estimées.

- Si le signal d'entrée du système est pauvre — défaut d'excitation persistante, $\phi(t)\phi^T(t) \approx 0$ — la mise à jour de $P(t)$ explose d'après la suite géométrique

$$P(t) = \frac{1}{\gamma} P(t-1)$$

Si le cas se présente, on gèle la mise à jour de la matrice.

L'équation (4.49) peut être obtenue avec un algorithme RLS habituel en rajoutant une matrice $Q(t)$ arbitraire ou au mieux choisie sur la base d'une connaissance *a priori* du processus variable à identifier. Dans un premier temps, on estime la matrice $Q(t)$ à travers divers algorithmes modifiés des moindres carrés. Ces approches, implicites, ne sont pas issues d'une recherche délibérée de l'expression de $Q(t)$. En effet, nous donnons les correspondances des valeurs réellement utilisées dans chaque cas de figure.

On remarque que :

- En comparant les équations (4.52c) et (4.51d), le RLS avec facteur d'oubli équivaut à un BLUE de matrice additionnelle (voir Ljung & Gunnarsson, 1990).

$$\hat{Q}(t) = \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \left(P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)}{\lambda + \phi(t)^T P(t-1)\phi(t)} \right) \quad (4.61)$$

De même, le facteur d'oubli se retrouve à la place de R

$$\hat{R}(t) = \lambda \quad (4.62)$$

- Les techniques de facteurs d'oubli de différentes sortes (Ramambason *et al.*, 1992) ont une matrice additionnelle équivalente, similaire à (4.61). Seul le facteur d'oubli a une expression différente suivant la méthode.

Le nouveau schéma que nous allons proposer consiste en deux estimateurs couplés. C'est une manière de réaliser le BLUE en estimant en parallèle une matrice de covariance Q et conjointement le scalaire R . Nous discuterons, d'une manière détaillée, le développement et l'implantation de cet estimateur de covariance dans la prochaine section. Elle sera suivie d'une discussion de propriétés analytiques de cette nouvelle méthode.

4.2.3 Estimation en ligne de la covariance

Dans cette section, une méthode directe est proposée pour obtenir une estimation explicite de Q et R . Comme pour le BLUE, assumons que la variation paramétrique est modélisée par un "pas aléatoire"

$$\theta(t) = \theta(t-1) + w(t) \quad (4.63)$$

Supposons également que la mesure est générée par un modèle du vrai paramètre, de dimension n , d'après

$$y(t) = \phi^T(t)\theta(t) + e(t) \quad (4.64)$$

Par conséquent, on peut définir l'erreur de prédiction (on utilise les termes *résidu* en identification et *innovation* pour le filtre de Kalman) par

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= y(t) - \hat{y}(t) \\ &= \phi^T(t)\theta(t) + e(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \end{aligned}$$

Une approximation du bruit des paramètres est donnée par :

$$\hat{w}(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t-1)$$

Il résulte un modèle (du type "moving average") du *processus dynamique qui génère le résidu* :

$$\varepsilon(t) = \phi^T(t)\hat{w}(t) + e(t)$$
(4.65)

Remarque 4.8 D'après (4.65), le résidu est formé des contributions de l'erreur de modélisation $e(t)$ et de la variation des paramètres $\hat{w}(t)$.

Hypothèses :

A.1 La séquence aléatoire et centrée $\{e(t)\}$ est *ergodique*.

Cette hypothèse est fondamentale pour le reste du développement de cette méthode.

A.2 Le régresseur $\phi(t)$ est *déterministe*.

Cette hypothèse de travail est souvent faite pour des systèmes dynamiques avec faible bruit de mesure. Elle implique que $\mathcal{E}\phi(t)e(t-\tau)$ est nulle.

A.3 $\mathcal{E}\hat{w}(t)\hat{w}^T(t) = \mathcal{E}w(t)w^T(t)$

Cette hypothèse devient triviale lorsque $\hat{\theta}(t)$ tend vers $\theta(t)$.

Calcul de la covariance :

Il découle de (4.65) que

$$\mathcal{E}e^2(t) = \phi^T(t) \mathcal{E}[w(t)w^T(t)] \phi(t) + \mathcal{E}e(t)e^T(t) \quad (4.66a)$$

D'après la définition de Q et R , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}e^2(t) &= \phi^T(t) Q(t) \phi(t) + R(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i(t) \phi_j(t) Q_{ij}(t) + R(t) \end{aligned} \quad (4.66b)$$

Nous adoptons une démarche analogue à Agarwal & Bonvin (1992) ou Mehra (1981) pour résoudre cette équation. Cette forme quadratique (4.66b) est équivalent à l'équation multilinéaire suivante.

$g(t) = h^T(t) \Xi(t) \quad (4.67a)$

où $g(t)$: le scalaire défini par

$$g(t) = \mathcal{E}e^2(t) \quad (4.67b)$$

$h(t)$: les éléments connus sont arrangés de la manière suivante

$$h(t) = [\phi_1^2 \ 2\phi_1\phi_2 \dots 2\phi_1\phi_n \mid \phi_2^2 \ 2\phi_2\phi_3 \dots 2\phi_n\phi_n \mid \phi_n^2 \mid 1]^T \quad (4.67c)$$

Les coefficients 2 des termes croisés traduisent le fait que la matrice Q est symétrique.

$\Xi(t)$: les éléments inconnus $Q_{ij}(t)$ de la matrice Q . Cette matrice symétrique est "déroulée" pour former le vecteur $\Xi(t)$ comprennent les éléments d'un bloc triangulaire plus ceux de la diagonale :

$$\Xi(t) = [Q_{11} \ Q_{12} \dots Q_{1n} \mid Q_{22} \ Q_{23} \dots Q_{n-1,n} \mid Q_{nn} \mid R]^T \quad (4.67d)$$

Cette opération tient compte du fait que la matrice Q est symétrique. Toute redondance est évitée.

Pour déterminer les $\frac{n^2 + n}{2} + 1$ inconnues du vecteur $\Xi(t)$, il nous faut autant d'équations.

Suite à l'hypothèse d'ergodicité (A.1), nous pouvons réécrire l'équation (4.67a) à k instants d'échantillonnage successifs en supposant θ constant durant l'intervalle de temps considéré. Ainsi, nous obtenons l'équation matricielle suivante

$$g(t) = H(t) \Xi \quad (4.68a)$$

où $g(t) = [g(t) \ g(t-1) \dots g(t-k+1)]^T$

$$\text{et } H(t) \approx \begin{bmatrix} h^T(t) \\ h^T(t-1) \\ \dots \\ h^T(t-k+1) \end{bmatrix} \quad (4.68b)$$

Il n'est pas obligatoire d'avoir un système de Cramer *i.e.*

$$k = \frac{n^2 + n}{2} + 1$$

car si le rang de $H(t)$ est inférieur à k , au lieu de procéder à une inversion matricielle, on peut toujours déterminer la solution moindres-carrés de l'équation (4.68)

$$\hat{\Xi}(t) = H^\dagger(t) G(t) \quad (4.69)$$

Dans ce cas, $H^\dagger(t)$ est la pseudo-inverse selon Moore-Penrose de $H(t)$.

Finalement en procédant à l'opération inverse de (4.67d), on reforme la matrice symétrique Q_y à partir du vecteur $\hat{\Xi}(t)$ que l'on vient de calculer. De cette manière, on obtient la covariance additionnelle $\hat{Q}(t)$ de l'estimateur. Nous signalons l'approche de Isaksson (1987), similaire à la nôtre, qui utilise la technique du filtre de Kalman adaptatif pour estimer conjointement les grandeurs Q et R .

4.2.4 Algorithme à modification explicite de covariance

Le nouvel algorithme d'identification de paramètres variables proposé est donné par les équations suivantes :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \bar{P}(t)\phi(t) [y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1)] \quad (4.70a)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1) \quad (4.70b)$$

Les procédures correspondant aux équations : 4.67c et 4.68a-b

$$\hat{\Xi}(t) = H^\dagger(t) G(t) \quad (4.70c)$$

$$\hat{Q}(t) = \hat{Q}(\hat{\Xi}(t)) \quad (4.70d)$$

$$\hat{R}(t) = \hat{R}(\hat{\Xi}(t)) \quad (4.70e)$$

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)}{R(t) + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} \quad (4.70f)$$

$$\bar{P}(t) = P(t) + \hat{Q}(t) \quad (4.70g)$$

Remarque 4.9

La mise à jour (4.70g) de $\hat{\theta}(t)$ devient

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + [P(t) + \hat{Q}(t)]\phi(t) [y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1)] \quad (4.71)$$

Cette expression est très proche de l'algorithme présenté par Fernandez del Busto *et al.* (1991). Ces auteurs ont montré que, sous cette forme, la matrice additionnelle $\hat{Q}(t)$ joue un très grand rôle dans l'amélioration de la dynamique de poursuite des variations paramétriques.

Remarque 4.10 Le développement de cet algorithme de calcul de $\hat{Q}(t)$ repose essentiellement sur la dynamique de la covariance $\mathcal{E}\varepsilon^2(t)$ d'après l'équation (4.66b). La valeur de $R(t)$ est relativement petite par rapport $\phi^T(t)Q(t)\phi(t)$ et $\mathcal{E}\varepsilon^2(t)$ si les paramètres sont variables. Il est difficile d'estimer \hat{R} conjointement avec $\hat{Q}(t)$. Pour cette raison, nous suggérons de l'éliminer dans les expressions des équations (4.66) et (4.67). Nous proposons deux algorithmes spécifiques qui ont un intérêt beaucoup plus pratique que l'algorithme général (4.70).

1. **RLS et matrice additionnelle** : On utilise un facteur d'oubli habituel dans l'équation (4.52c) de mise à jour de $P(t)$. On choisit, comme matrice additionnelle \hat{Q} , celle proposée dans le paragraphe précédent.

$$P(t) = \frac{1}{\lambda} \left(P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)}{\lambda + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} \right) \text{ et } \tilde{P}(t) = P(t) + \hat{Q}(t) \quad (4.72)$$

Nous héritons de toutes les propriétés du facteur d'oubli qui ont été abondamment étudiées dans la littérature. En outre, ce choix correspond à une matrice \hat{Q} , plus «véridique» au sens où elle est déduite d'un raisonnement basé directement sur les variations réelles des paramètres. Aussitôt que ces variations s'estompent, les valeurs de \hat{Q} ne sont plus significatives.

2. **RLS avec remise à jour de la covariance** : La matrice $\hat{Q}(t)$ peut servir de mesure de détection de la variation des paramètres. Au moment où l'on juge qu'une variation est importante, on procède à une réactualisation de la covariance (covariance resetting). Dans ce cas, on se fixe une valeur arbitraire Q_r , e.g. $Q_r = \alpha I$

Si	$\ \hat{Q}(t)\ > \text{seuil}$ (basé sur la connaissance de valeurs pertinentes de $\hat{Q}(t)$)	
alors	$\tilde{P}(t) := Q_r$	
sinon	$\tilde{P}(t) := P(t) = \frac{1}{\lambda} \left(P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)}{\lambda + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} \right)$	(4.73)

Contrairement à toutes les autres méthodes connues pour détecter l'instant où l'on pratique cette action et qui sont toutes basées sur des raisonnements *ad hoc*, cette nouvelle proposition est basée sur une grandeur calculée en ligne avec le paramètre $\hat{\theta}(t)$.

4.3 INCERTITUDES $\Delta\theta$ ESTIMÉES EN LIGNE

Les méthodes d'estimation d'incertitudes paramétriques sont rares. L'intérêt pour ce type de problème existe depuis peu de temps car auparavant, on admettait que la structure de modèle adoptée était capable de caractériser correctement le système. En réalité, les estimées ne sont correctes que sous des conditions très strictes comme le résidu qui doit être blanc et l'adéquation parfaite entre l'ordre du système et celui du modèle. Avec l'avènement de la commande robuste, il est intéressant d'estimer un modèle d'incertitude.

4.3.1 Nouvelle méthode d'estimation de l'incertitude paramétrique

Comme *modèle d'incertitude*, nous adoptons $\hat{w}(t)$

$$\hat{w}(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t-1)$$

En observant l'équation (4.67d), on constate que les éléments $Q_{ii}(t)$ correspondent à la variance de $\hat{w}(t)$, donc des incertitudes paramétriques $\Delta\theta(t)$ successifs au cours de l'itération i.e.

$$\text{var}\{\hat{w}(t)\} = Q_{ii}(t) \quad (4.74)$$

Par conséquent, nous pouvons identifier l'incertitude paramétrique $\Delta\hat{\theta}(t)$ en parallèle avec le paramètre $\hat{\theta}(t)$.

Proposition 4.1 (Estimation de l'incertitude paramétrique) Si le paramètre variable θ est modélisé par un pas aléatoire et si nous supposons que le bruit de mesure $e(t)$ est faible comparativement au signal supplémentaire dû aux incertitudes paramétriques, alors, une estimation de l'incertitude paramétrique est donnée par

$$\Delta\hat{\theta}_i(t, k) = \frac{1}{k+1} \sqrt{\sum_{\tau=t-k}^t \hat{Q}_{ii}(\tau)} \quad (4.75)$$

Cette estimation est d'autant plus consistante que k est proche de t i.e.

$$\Delta\theta = \lim_{k \rightarrow t} \Delta\hat{\theta}(t, k)$$

◆◆◆

Démonstration :

Si le bruit de mesure est négligeable par rapport au signal dû à la perturbation paramétrique, l'éq. (4.65) devient

$$\mathcal{E}\varepsilon^2(t) \approx \Phi^T(t) \mathcal{E}[\hat{w}(t) \hat{w}^T(t)] \Phi(t) = \Phi^T(t) \hat{Q}(t) \Phi(t)$$

Cette approximation est d'autant meilleure que R est petit.

Explicitons la matrice $\hat{Q}(t)$

$$\hat{Q}_{ii}(t) = \mathcal{E}[\hat{w}_i^2(t)]$$

Elle est évaluée dans l'intervalle

$$\tau = t - k$$

L'hypothèse d'ergodicité nous autorise à prendre comme incertitude paramétrique à l'instant t la moyenne temporelle des éléments de la diagonale de \hat{Q} i.e.

$$\Delta \hat{\theta}_i(t, k) = \frac{1}{k+1} \sqrt{\sum_{\tau=t-k}^t \hat{Q}_{ii}(\tau)}$$

Si $\tau \rightarrow 0$ i.e. $k \rightarrow t$, alors on obtient la "vraie" moyenne qui correspond à l'incertitude réelle

$$\Delta \hat{\theta}_i(t) = \frac{1}{t} \sqrt{\sum_{\tau=0}^t \hat{Q}_{ii}(\tau)}$$

Dans ce cas,

$$\Delta \hat{\theta}(t) \rightarrow \Delta \theta$$

c'est une méthode "batch" de calcul de l'incertitude.

...

Remarque 4.11 On dispose d'une estimation $\Delta \hat{\theta}(t)$ à chaque itération de l'identification. En dehors de toute démarche adaptative, on ne garde, pour les besoins d'un problème de synthèse, que les valeurs de $\Delta \hat{\theta}(t)$ maximales par paliers de valeurs de θ nominaux.

4.3.2 Méthode de Hjalmarsson-Ljung

Les études sur l'estimation des incertitudes sont rares. On peut citer celle de Hjalmarsson & Ljung (1992) que nous allons brièvement présenter à titre de comparaison. On suppose que la mesure peut être représentée par un modèle avec les vrais paramètres θ_0 . L'erreur de modélisation associée à ce modèle est supposé blanc :

$$y(t) = \phi^T(t)\theta_0 + e(t)$$

$$\mathcal{E}e(t)e(s) = \delta(t,s)\sigma_0, \quad \delta(t,s) \text{ représente le symbole de Kronecker}$$

$$\mathcal{E}e(t) = 0.$$

Alors $\hat{\theta}(t)$ convergera vers θ_0 et on aura $\mathcal{E}(t, \theta_0) = e(t)$.

Dans ces conditions, l'estimée de l'incertitude est donnée par

$$\Delta \theta = \sigma_0 [\mathcal{E}\phi(t)\phi^T(t)]^{-1} \quad (4.76)$$

Pour une estimation basée sur un critère LS, l'estimée est essentiellement basée sur les dernières $\frac{1}{1-\lambda}$ mesures. La contribution des mesures antérieures est négligeable à cause du facteur d'oubli. Nous donnons le résultat de Hjalmarsson-Ljung sous forme de proposition.

Proposition 4.2 (Méthode de Hjalmarsson-Ljung) *On suppose que $y(t)$ et $\phi(t)$ sont générés par un système exponentiellement stable excité par un bruit blanc. Si on définit*

$$R_{\lambda}^{\delta}(t) = (1-\lambda) \sum_{k=t}^t \lambda^{t-k} [\phi(k) \phi^T(k) + (1-\lambda) \delta I] \quad (4.77a)$$

$$F_{\lambda}(t) = (1-\lambda) \sum_{k=t}^t \lambda^{t-k} \phi(k) y(k) \quad (4.77b)$$

$$\hat{\theta}_{\lambda}(t) = [R_{\lambda}^{\delta}(t)]^{-1} F_{\lambda}(t) \quad (4.77c)$$

$$\bar{\theta}_t = \frac{1}{t} \sum_{k=t}^t \hat{\theta}_{\lambda}(k) \quad (4.77d)$$

Alors, l'incertitude paramétrique $\Delta\hat{\theta}(t)$ est donnée par

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{1-\lambda} \sum_{k=t}^t [\hat{\theta}_{\lambda}(k) - \bar{\theta}_t] [\hat{\theta}_{\lambda}(k) - \bar{\theta}_t]^T = \Delta\hat{\theta}(t) \quad (4.78)$$

♦ ♦ ♦

Démonstration :

Voir Hjalmarsson & Ljung (1992).

...

Remarque 4.12 Ce dernier résultat est basé sur des calculs très techniques. A tel point qu'il est possible d'envisager une alternative en la *méthode de Monte Carlo*. Cela consiste à utiliser M données "batch", chacune de longueur N , pour obtenir les M différentes estimées de θ . Ensuite, on estime la covariance P en utilisant ces estimées. Cette méthode est assez lourde. On ne peut l'utiliser que si M et N sont grands.

4.4 ILLUSTRATION PRATIQUE

Comparaison de notre nouvelle méthode avec RLS

Algorithme RLS de base :

Un processus variable du deuxième ordre est simulé. Ses paramètres varient chaque 50 itérations alternativement du modèle $H_1(z)$ au modèle $H_2(z)$

où

$$H_1(z) = \frac{0.1z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1} - 0.2z^{-2}} \quad (4.79a)$$

et

$$H_2(z) = \frac{0.3z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 - 0.7z^{-1} - 0.4z^{-2}} \quad (4.79b)$$

Chaque estimation démarre par un RLS conventionnel avec un facteur d'oubli $\lambda=0.94$. Les figures 4.6 et 4.7 montrent une amélioration de la capacité de poursuite de RLS inversement proportionnelle à la valeur de λ .

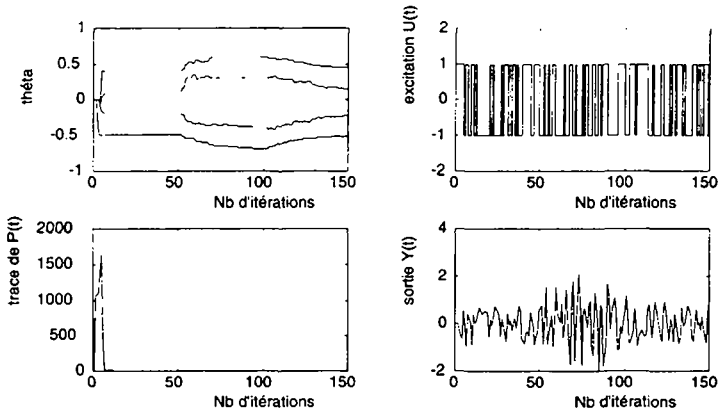


Fig. 4.6 : RLS avec facteur d'oubli constant

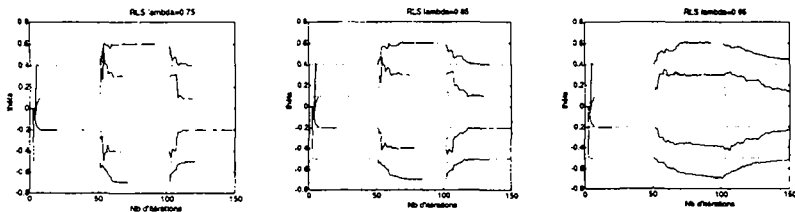


Fig. 4.7 : Evolution du gain d'adaptation en fonction de λ

En pratique, on n'utilise jamais un facteur d'oubli inférieur à 0.98 pour éviter les problèmes induites par les bruits de mesure et à cause du risque d'explosion de l'algorithme si l'excitation n'est pas persistante.

Algorithmes RLS améliorés :

Nous allons observer le comportement de la matrice de gain de quelques algorithmes d'identification dédiés aux paramètres variables.

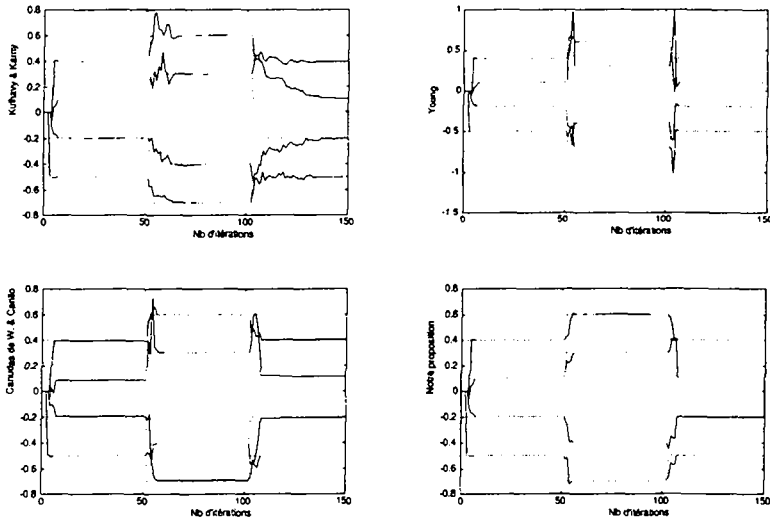


Fig. 4.8 : Comparaison de quatre méthodes d'identification

Chaque algorithme de la figure 4.11 exhibe une bonne capacité de poursuite de paramètres variables. La zone morte dans la méthode de Canudas de Wit *et al.* (1990) provoque des écarts permanents observés sur la figure correspondante. Notre nouvelle méthode, basée sur une remise à jour de la covariance, possède une excellente propriété de convergence. Malgré tout, il lui faut un certain temps pour remplir le vecteur $g(t)$ de l'équation 4.68. Sur la figure 4.9, on remarque bien que la méthode de Canudas de Wit *et al.* et celle de Kulhavy & Karny (1984) ne permettent pas d'éviter l'écroulement des valeurs des éléments de la matrice de gain $P(t)$. Celle de Young (1984) maintient un taux d'adaptation élevé et ceci, non seulement quand les paramètres changent. L'algorithme n'est utilisable que si le niveau de bruit de mesure est faible. Quant à notre nouvelle proposition, on a représenté la trace de la matrice $\hat{Q}(t)$ plutôt que celle de $\tilde{P}(t)$. Cette matrice n'a de valeurs significatives qu'au moment où les paramètres changent. Elle constitue un véritable indicateur de variation comme on cherche à avoir dans la «théorie de la détection». La figure 4.9 présente l'allure de la trace de la matrice $P(t)$ pour les méthodes de Kulhavy & Karny, Canudas de Wit et Carillo, et Young. Pour notre méthode, cette caractéristique est celle d'un RLS avec facteur d'oubli normal (fig. 4.6).

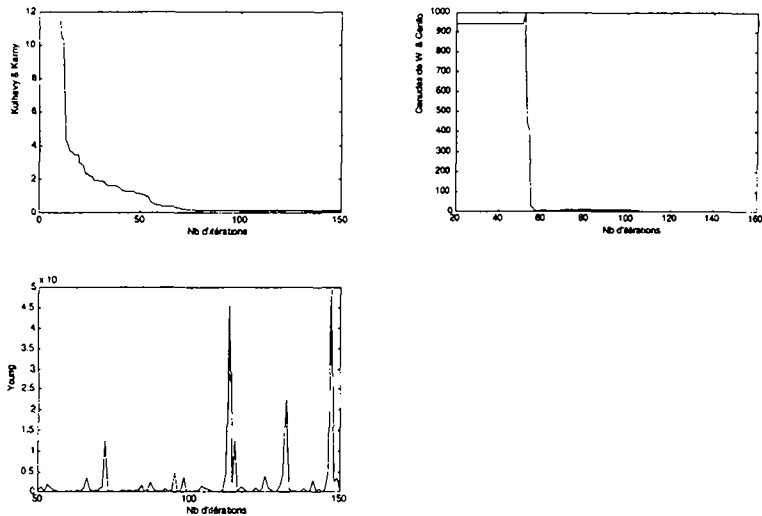


Fig. 4.9 : Comparaison des traces de la matrice de gain
(méthodes de Kulhavy & Karny, Canudas de Wit et Carillo, et Young)

La figure 4.10 montre que la matrice $Q(t)$ détecte les variations paramétriques. Par conséquent, la convergence du paramètre peut être accélérée en réinitialisant la matrice de covariance, dès qu'un changement de paramètre est détecté.

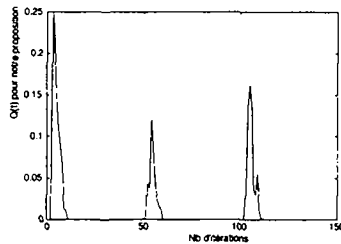


Fig. 4.10 : Trace de la matrice $Q(t)$ estimée

Estimation d'incertitude paramétrique :

La figure 4.11 montre les valeurs d'incertitudes paramétriques $\Delta\theta(t)$ estimées conjointement avec le paramètre $\theta(t)$. Il n'est pas possible de trouver une base de comparaison entre notre méthode et celle de Hjalmarsson-Ljung §4.3.3.B car la signification respective attribuée à la notion d'incertitude est très différente.

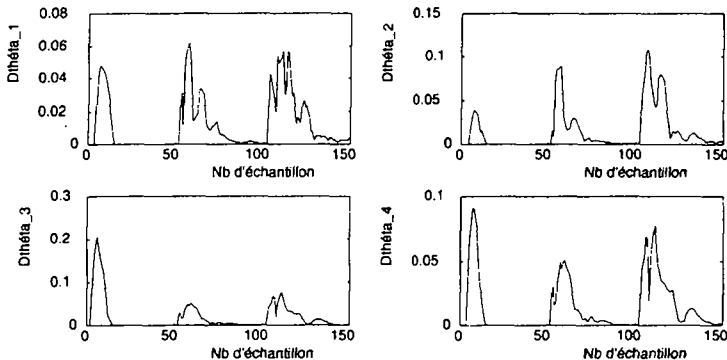


Fig. 4.11 : Incertitudes paramétriques estimées

4.5 CONCLUSION

La famille du gradient stochastique d'identifier convenablement des systèmes à paramètres variables. Malheureusement, leur direction de recherche est pauvre; ce défaut commence à peser sur cet algorithme dès que l'ordre du système est supérieur à 1. On cherche à modéliser le processus variable par un pas aléatoire (random walk). La meilleure identification d'un tel modèle est donnée par un filtre de Kalman (homologue de l'estimation d'état). En général, les covariances utilisées par ce filtre ne sont pas connues et beaucoup de techniques *ad hoc* ont été suggérées pour les estimer. Pour l'algorithme RLS, un facteur d'oubli peut être associé à une covariance paramétrique. Dans ce cas, cet estimateur préserve une faible capacité d'adaptation. On peut encore l'améliorer si le facteur d'oubli est variable. Mais dans ce cas des tests d'essais-erreurs seront nécessaires pour déterminer ce facteur d'oubli et la maîtrise de l'effet conjoint des bruits de mesure. Si les bruits sont surestimés, l'algorithme sera concomitamment insensible aux variations des paramètres. Notre nouvelle proposition évite d'avoir à prendre des décisions circonstancielles en calculant explicitement l'incertitude des paramètres; de cette démarche résulte une bonne estimation dans n'importe quelle situation. Nous agissons dans deux directions. *Primo*, on rajoute un terme dépendant des variations paramétriques à la matrice de gain; on évite ainsi l'annulation à long terme de $P(t)$. *Secundo*, cette matrice additionnelle $Q(t)$ peut pertinemment détecter les changements de paramètres. Dans ce cas, on accélère la convergence de l'estimation en réinitialisant la covariance (covariance resetting).

Quant à l'estimation des incertitudes, les valeurs obtenues permettent de modéliser des perturbations additives. On constate que les incertitudes sont d'autant plus importantes que les paramètres varient. Cependant, on ne peut pas éviter de suivre les variations nominales du paramètre car dès qu'un nouveau palier de valeurs de $\theta_d(t)$ est atteint, l'incertitude redevient peu significative. Nous déduisons que le **paramètre nominal variable** se traite dans un **concept adaptatif** tandis que l'**incertitude** autour de cette valeur nominale (qui peut elle-même être variable) est l'objet du **réglage robuste**.

REFERENCES

- Agarwal M. & Bonvin D. (1992), *«Improved State Estimation in Face of Unreliable Parameters»*, J. Process Control, vol.1, p.251.
- Anderson B. D. O. & Moore J. B. (1979), *«Optimal Filtering»*, Prentice-Hall.
- Canudas de Witt C. & Carillo J. (1990), *«A Modified EW-RLS Algorithm for Systems with Bounded Disturbances»*, Automatica, vol.26, pp.599-606.
- Fernandez del Busto R., Wellstead P. E., Zarrop M. B. (1991), *«Parameter Transient Tracking for Recursive Estimation»*, IEE Proceedings-D, vol.138, n°1.
- Fortescue L. S., Kershenbaum L. S. & Ydstie B. E. (1981), *«Implementation of Self-tuning Regulators with Variable Forgetting Factor»*, Automatica, vol.6, pp.831-834.
- Gauss K. F. (1809), *«Theory of the Motion of the Heavenly Bodies»*, Dover, New York.
- Goodwin G. & Sin K. (1984), *«Adaptive Filtering, Prediction and Control»*, Prentice Hall.
- Hjalmarsson H. & Ljung L. (1992), *«Estimating Model Variance in the Case of Undermodelling»*, IEEE-TAC, vol.37, pp.1004-1008.
- Isaksson A., (1987), *«Identification of Time-varying Systems through Adaptive Kalman Filtering»*, Preprints 10th IFAC World Congress, Munich, vol. X, pp. 306-311.
- Johnson Jr. C. R. (1988), *«Lectures on Adaptive Parameter Estimation»*, Prentice Hall.
- Kulhavy R. & Karny M. (1984), *«Tracking of Slowly Varying Parameters by Directional Forgetting»*, IFAC 9th Triennial World Congress, Hungary, pp.687-692.
- Ljung L. & Gunnarsson S. (1990), *«Adaptation and Tracking in System Identification - A Survey»*, Automatica, vol.26, pp.7-21.
- Ljung & Söderström T. (1983), *«Theory and Practice of Recursive Identification»*, MIT Press.
- Mehra R. K. (1972), *«Approches to Adaptive Filtering»*, IEEE-TAC, vol.17, pp.693-698.
- Ramambason O. C., Crisalle O. D., Bonvin D., (1992), *«On Using the Parameter Covariance for Improving the Recursive Least-squares Algorithm»*, Preprints ACC-92.
- Robbins H. & Monro S. (1951), *«A Stochastic Approximation Method»*, Annal of Mathematical Statistics, vol.22, pp.400-407.
- Tulleken H. J. A. F. (1987), *«An Adaptive Forgetting Strategy for On-line Identification of Multivariable Processes»*, Journal A, vol.28, pp.195-208.

Widrow B., McCool J., Larimore M. & Johnson Jr C. R. (1976), «*Stationnary and Nonstationary Learning Characteristics of the LMS Adaptive Filter*», Proc. of IEEE, vol. 64, pp.1151-1162.

Widrow B. & Wallach E. (1984), «*The Statistical Efficiency of the LMS Algorithm with Nonstationary Inputs*», IEEE-TIT, IT-30, pp211-221.

Young P. (1984), «*Recursive Estimation and Time-Series Analysis*», Springer-Verlag, Berlin.

CONCLUSION

La contribution de ce travail réside essentiellement dans la prise en compte des dégradations inhérentes aux procédés paramétriquement incertains afin de mieux corriger leurs effets néfastes sur la dynamique et la réponse d'un système asservi.

Dans un premier temps, une approche locale permet d'évaluer les variations infinitésimales de la sortie provoquées par de petites variations des coefficients du procédé. Mais, ne considérer qu'une faible variation n'est pas toujours admissible. Ceci nous a amené à nous intéresser à l'identification des incertitudes, conjointement à celle des paramètres nominaux. Le traitement de ces derniers est habituellement bien maîtrisé par les concepteurs de système de commande. Nous avons appréhendé ensuite la problématique de la synthèse d'un régulateur polynomial à deux degrés de liberté.

Rappelons les trois volets des principaux résultats obtenus dans ce travail.

L'insensibilisation paramétrique d'un système asservi est soumise à l'annulation possible de la fonction de sensibilité S . Nous avons montré que cette politique de réglage correspond toujours à un gain élevé sous-jacent. Il a été constaté que l'expression des fonctions de sensibilité d'un IMC ou d'un GPC se prête naturellement à cette annulation à cause de la forme soustractive de leur numérateur. Un réglage bang-bang est naturellement insensible. Nous en avons suggéré une forme pratique en mettant en cascade un relais avec un PID. Une étude fouillée, utilisant le formalisme des perturbations singulières, a montré théoriquement la pertinence de notre hypothèse : ce type de réglage s'est avéré robuste au-delà d'une variation paramétrique infinitésimale.

Les méthodes d'identification, de la famille des moindres carrés récurrents, ont été revisitées. On a montré la faiblesse de l'utilisation d'un simple facteur d'oubli pour poursuivre des paramètres variables. Nous avons proposé une amélioration de ce type d'algorithme en utilisant une matrice additionnelle $Q(t)$ qui non seulement dope avantageusement la matrice de gain d'adaptation $P(t)$ mais arrive également à détecter les instants où ont effectivement lieu la «rupture du modèle». Notre méthode, basée sur l'estimation en ligne de la covariance, s'affranchit des décisions *ad hoc* habituellement rencontrées dans ce genre de problème.

Le régulateur à deux degrés de liberté, sous forme de RST calculé par placement de pôles, jouit d'une très bonne audience dans la communauté des systèmes échantillonnés. Nous lui

avons adjoint une procédure de calcul itératif permettant d'obtenir un régulateur réellement robuste. Nous avons suggéré d'émuler une perturbation étendue constituée par la superposition en sortie de la perturbation en sortie habituelle et du signal supplémentaire provoqué par les incertitudes paramétriques. La robustesse s'obtient par compensation de ce signal composite. Moyennant quelques hypothèses, nous avons démontré que notre démarche aboutit à la factorisation de Youla d'un régulateur RST.

Les qualités de l'asservissement (poursuite de consigne) et de la régulation (compensation d'un signal de perturbation) sont les buts recherchés lors de la synthèse d'un régulateur fixe; la robustification est incontournable dès que les paramètres sont incertains.

Enfin, mentionnons quelques problèmes ouverts qui feraient suite à ce travail :

- la séparation du bruit de mesure et de l'effet réel de l'incertitude paramétrique cumulés en l'erreur de prédiction $\varepsilon(t)$ lors de l'identification de ces incertitudes;
- l'étude de sensibilité des systèmes asservis relative à des grandeurs caractéristiques telles que les pôles ou les zéros du système;
- une étude plus approfondie (analyse et synthèse) de la robustesse du GPC;
- une méthode analytique de robustification, basée sur notre approche Q-RST, qui aboutirait à un régulateur optimal et unique.

LISTE DES SYMBOLES

s	Variable de Laplace
z	Variable de la transformée en z
ω	Pulsation
$P_O(s)$	Modèle de procédé
$\Delta P_O(s)$	Incertitude de modèle
$K(s)$	Régulateur
T_e, f_e	Période et fréquence d'échantillonnage
$L_O(j\omega)$	Fonction de transfert en boucle ouverte
q^{-1}	Opérateur retard
$A(q^{-1})$	Dénominateur du modèle de procédé
$B(q^{-1})$	Numérateur du modèle de procédé
$N(q^{-1})$	Numérateur d'une fonction de transfert
$D(q^{-1})$	Dénominateur d'une fonction de transfert
$H(q^{-1})$	Fonction de transfert quelconque
t	Temps
$r(t)$	Signal de consigne
$y(t)$	Signal de sortie
$e(t)$	Signal d'erreur
$u(t)$	Signal d'entrée
$d(t)$	Signal externe de perturbation
κ	Coefficient à valeur élevée
RLS	Recursive Least Square, algorithme d'identification par moindres carrés récurrents
$\varepsilon(t)$	Erreur de prédiction ou résidu
α	Coefficient scalaire
$\gamma(t)$	Gain scalaire d'adaptation
$\phi(t)$	Vecteur de mesure (ou régresseur)
$P(t)$	Matrice de gain du RLS
$Q(t)$	Matrice additionnelle
$S(t)$	Matrice de covariance de $\phi(t)$
$\theta(t)$	Vecteur paramètre formé des coefficients du polynôme $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ à identifier
$\Delta\theta(t)$	Vecteur incertitude paramétrique à identifier
λ	Facteur d'oubli
Ξ	Matrice intermédiaire formée de Q_{ti}
$g(t)$	Variance de ε
$R(t)$	Variance de l'erreur de mesure $e(t)$
$h(t)$	Matrice intermédiaire formée de ϕ_i
$\mathcal{E}(H)$	Espérance mathématique de H
\mathcal{S}	Fonction de sensibilité
\mathcal{T}	Fonction de sensibilité complémentaire
σ_i	Fonction de sensibilité absolue
k_p	Coefficient proportionnel d'un régulateur PID
t_i	Constante de temps d'intégration d'un régulateur PID

t_d	Constante de temps de dérivation d'un régulateur PID
$A, B,$	Réalisation d'un système dynamique
C, D	
x, z	Vecteurs d'état
u	Vecteur de commande
ε	Coefficient déterminant la perturbation singulière
τ	Temps rapporté à ε
λ_i	Valeur propre d'une matrice
$N2-N1$	Horizon de coût du GPC
NU	Horizon de commande du GPC
Φ, Ψ	Matrices de prédiction du GPC
\mathcal{J}	Fonction coût
$w(t)$	Vecteur des consignes prédites du GPC
$\hat{y}(t)$	Vecteur des sorties futures estimées
$\Delta \hat{u}(t)$	Vecteur des incréments de commande futurs estimés
G	Matrice des séquences de la réponse indicielle du procédé
$p(t)$	Vecteur des réponses libres
\mathbf{P}	Famille de procédés
\mathbf{R}	Corps des nombres réels
\mathbf{C}	Corps des nombres complexes
$\mathcal{R}e(s)$	Partie réelle de s
$\mathcal{I}m(s)$	Partie imaginaire de s
$W(s)$	Fonction de pondération
ΔK	Marge de gain
$\Delta \phi$	Marge de phase
ΔM	Marge de module
ΔR	Marge de retard
ΔM_c	Marge de module complémentaire
A_o, B_o	Polynômes représentant la dynamique nominale
A_m, B_m	Polynômes représentant la dynamique de référence
A_{obs}	Polynôme observateur
R, S, T	Polynôme constituant le régulateur RST
π	Perturbation étendue
Q	Polynôme de compensation de la perturbation étendue
F	Polynôme de filtrage

CURRICULUM VITAE

Personal

First name : Olivier Camille
Name : RAMAMBASON
Nationality : Malagasy
Origin and Age : Madagascar, born on 28 Feb. 1954
Denomination : Protestant

Education

- 1986 Doctorat de 3ème cycle, supervised by Prof. Longchamp on « Digital Control and Identification of SISO Systems ».
- 1982 M. S. in automatic control, supervised by Prof. A. Roch on « Process Identification ».
- 1980 B. S. in Mechanical Engineering, Ecole Polytechnique de Diégo Suarez - Madagascar.

Employment history/experience

- 1988 - Present, Research and teaching assistant. Institut d'Automatique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Developed real-time data acquisition system. Taught Computer-Aided Learning in automatic control to undergraduate students. Supervised senior students in their diploma works, semestrial projects and control labs.
- 1986 - 1988, Maître-Assistant. Laboratoire de Servomécanisme, Ecole Polytechnique de Diégo Suarez - Madagascar. Taught undergraduate student's basic course and laboratory of automatic control.
- 1985 - 1986, Research assistant. Institut d'Automatique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Developed system identification algorithms and digital controllers.
- 1981 - 1985, Instructor and research assistant. Laboratoire de Servomécanisme, Ecole Polytechnique de Diégo Suarez - Madagascar. Supervised student diploma and lab works in automatic control.
- 1980 - 1981, Production engineer. MACOMA SA Tamatave - Madagascar. Managed the production lines for steel panel stamping and nail manufacturing.